Jan van de Craats
Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
craats@science.uva.nl

Boekbespreking

Wiskunde is mensenwerk!

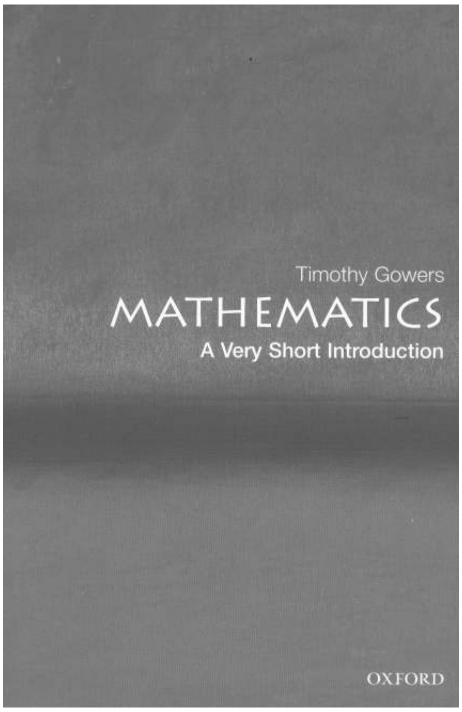
Er is tegenwoordig geen gebrek aan boeken over wiskunde voor een breed publiek. Daarbij worden moeilijke onderwerpen niet geschuwd: zo zijn er bijvoorbeeld al heel wat populariseringen verschenen van cryptografie, de Laatste Stelling van Fermat of het Riemannvermoeden. Maar ook algemene boeken over wiskunde vinden gretig aftrek. Jan van de Craats bespreekt drie recente titels.

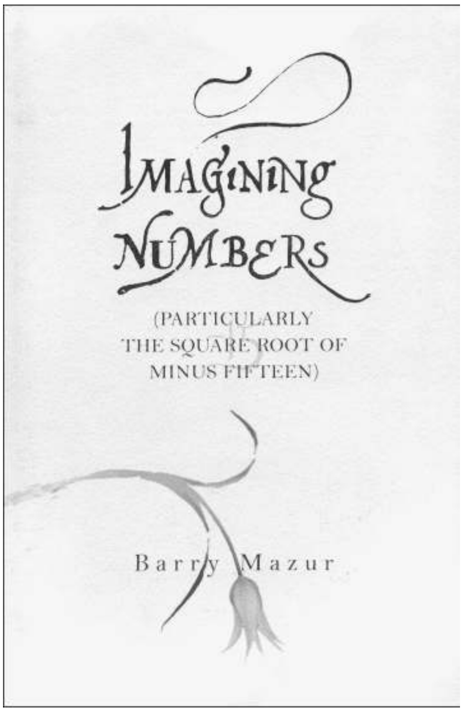
Wiskunde als wetenschap oefent een magische aantrekkingskracht uit op een relatief groot publiek. Boeken over wiskunde halen verrassend hoge oplagecijfers. Deels is dat de verdienste van vermaarde popularisatoren als Ian Stewart, Keith Devlin, Simon Singh en James Gleick. Maar van tijd tot tijd duiken er nieuwe namen op, zelfs van actieve topwiskundigen van wie je niet zou verwachten dat ze de kunst beheersen om voor een algemeen publiek te schrijven. Zo iemand is de Brit Timothy Gowers die in 1998 een *Fields Medal*, de hoogste onderscheiding voor jonge wiskundigen, won voor zijn werk op het gebied van de functionaalanalyse en de combinatoriek. Gowers leverde een verrassende bijdrage aan de serie *Very Short Introductions* van Oxford University Press. Een ander voorbeeld is de Amerikaan Barry Mazur van Harvard University, een autoriteit op het gebied van de algebraïsche meetkunde en de getaltheorie. Velen zullen zich zijn rol herinneren in de BBC-documentaire over het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat door Andrew Wiles. Mazur schreef een poëtische inleiding voor niet-wiskundigen over reële en complexe getallen onder de titel *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*. Leonard Wapner, de derde auteur die ik hier zal bespreken, is als researchwiskundige niet van dit torenhoge niveau, maar zijn succesvolle boek *The Pea and the Sun*, dat gaat over de Banach-Tarskiparadox (oftewel de wonderbaarlijke balverdubbeling), sluit heel mooi aan bij een thema dat ook door Gowers en Mazur nadrukkelijk aan de orde wordt gesteld, namelijk de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid.

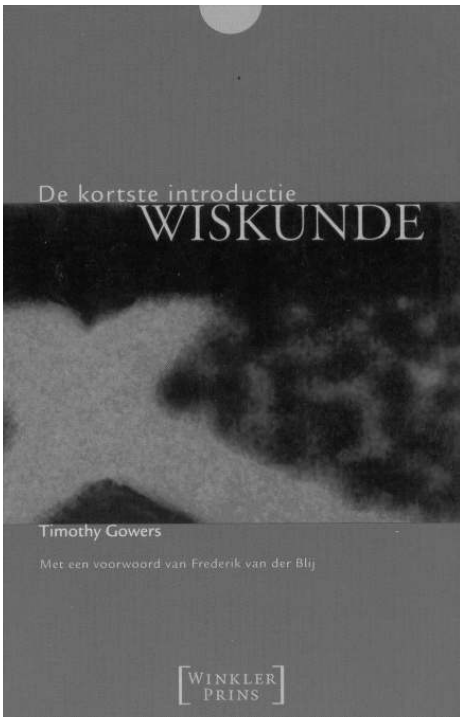
Mathematics, A Very Short Introduction

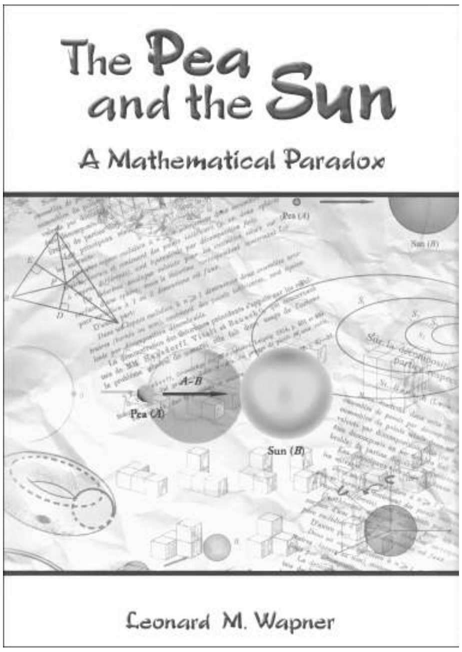
Het leek een volstrekt onmogelijke opgave waarvoor Timothy Gowers zich gesteld zag: schrijf voor een intelligent lekenpubliek een algemene inleiding in de wiskunde met een omvang van niet meer dan zo'n honderdveertig bladzijden op zakagendaformaat. Tegelijkertijd was het ook een geweldige uitdaging: de serie *Very Short Introductions* is een ambitieus, succesrijk en zeer omvangrijk project; het deel *Mathematics* is al nummer 66 in de reeks. Zonder enige reserve kan gezegd worden dat Gowers zich op een bewonderenswaardige wijze van zijn taak gekweten heeft. Sterker nog, ik ken geen beter boek voor lezers met een algemene culturele bagage die willen weten wat wiskunde nu eigenlijk is.

Natuurlijk heeft Gowers keuzes moeten maken: geen sexy toepassingen, geen anekdotes, cartoons, Mandelbrot sets, chaostheorie of Gödelstellingen. Wat dan wel? Om te beginnen een prachtig hoofdstuk over modelvorming. Hoe bereken je onder welke hoek je een steen moet gooien die zo ver mogelijk weg moet komen? Gowers laat zien dat die vraag veel ingewikkelder is dan je op het eerste gezicht zou denken, zelfs als je over voldoende natuurkundige en wiskundige voorkennis beschikt. Welke nauwkeurigheid wil je bereiken? Welke veronderstellingen maak je? Welke factoren neem je mee? Modelvorming betekent vereenvoudigen en verstandige keuzes maken voordat je ook maar kunt beginnen wiskunde als instrument in te zetten om enige greep op de werkelijkheid te krijgen. Gowers weet binnen zestien bladzijden de complexe relatie tussen wiskunde en werkelijkheid duidelijk te maken aan de hand van een serie welgekozen voorbeelden. Alleen al dit hoofdstuk zou verplichte kost moeten zijn voor alle gelovigen in het evan-









gelie van het zogenaamde realistische wiskundeonderwijs, waarbij kritische modelvorming zelden enige aandacht krijgt en waarbij er maar al te vaak geen duidelijke scheiding wordt aangebracht tussen werkelijkheid en wiskundig model.

Ook het tweede hoofdstuk, *Numbers and abstraction*, is een fraai staaltje van heldere expositie. Gowers legt uit dat het niet de vraag is wat getallen zijn, maar wat je ermee kunt doen. Het gaat erom wat de wetten zijn waaraan ze gehoorzamen, net zoals het bij schaken alleen maar gaat om de regels van het spel en niet om de vraag wat het bord en de stukken nu eigenlijk zijn. Filosofische en existentiële vragen over getallen zijn voor de wiskunde weinig relevant. Vanuit dit abstracte gezichtspunt, namelijk de spelregels waaraan getallen moeten voldoen, behandelt Gowers de natuurlijke getallen, de breuken, de reële getallen en de complexe getallen. Alles op een summiere, maar tegelijkertijd lucide en inzichtelijke wijze.

Daarna volgen hoofdstukken over bewijzen, limieten en oneindigheid, dimensie, meetkunde, benaderingen en schattingen. Het laatste hoofdstuk geeft antwoorden op acht veelgestelde vragen, zoals de vraag waarom er zo weinig vrouwen in de wiskunde zijn, de vraag of wiskundigen computers gebruiken en de vraag waarom zoveel mensen een hekel aan wiskunde hebben. Die antwoorden zijn soms verrassend, meestal heel evenwichtig en in alle gevallen goed beargumenteerd.

Conclusie: *Mathematics, A Very Short Introduction* is een prachtig boekje voor iedere wiskundige, zowel om te hebben als om cadeau te geven. De in hetzelfde formaat uitgegeven Nederlandse vertaling van Jan Willem Nienhuys is uitstekend, alleen vind ik de Nederlandse ondertitel *De kortste introductie* wat te apodictisch. Maar daar kan Nienhuys niets aan doen; het is de algemene Nederlandse titel die uitgeverij Het Spectrum voor de serie heeft bedacht.

Imagining Numbers

"This book, then, is written for people who have no training in mathematics and who may not have actively thought about mathematics since high school, or even during it, but who may wish to experience an act of mathematical imagining and to consider how such an experience compares with the imaginative work involved in reading and understanding a phrase in a poem." Deze zinnen uit het voorwoord van het boek van Barry Mazur geven aan hoe het ontstaan is en wat hij ermee wil bereiken. Het is begonnen als een korte tekst voor bevriende alfa's die hadden aangegeven dat ze wel eens iets van wiskunde wilden weten. Mazur wilde ze uitleggen wat imaginaire getallen en wiskundige objecten in het algemeen zijn, en hoe je ze in je verbeelding kunt oproepen. Want dat is in dit boek het sleutelwoord: *imagination*, oftewel verbeeldingskracht. Mazur gebruikt daarbij voortdurend beelden uit de poëzie en de literatuur om de verbeelding van zijn gehoor te prikkelen. Neem bijvoorbeeld een uitdrukking als 'Het geel van een tulp'. Wat voor beeld roept dat op? En is zoiets vergelijkbaar met het beeld dat een wiskundige voor zijn geestesoog ziet verschijnen als hij het heeft over wortel twee, of over de wortel uit min vijftien?

In zekere zin lijkt Mazur een totaal andere houding aan te nemen dan Gowers voor wat betreft de vraag wat getallen zijn. Gowers schuift die vraag als zinloos terzijde, maar bij Mazur is de titel van de zevende paragraaf in het tweede hoofdstuk *What is a square root?* Desondanks bevat die paragraaf (en de rest van dat hoofdstuk) niet het antwoord op de vraag wat een wortel nu eigenlijk is, maar een historisch aangekleed exposé over wortels, de vierkantsvergelijking, de abc-formule en de allereerste verschijningsvormen van imaginaire getallen in het Italië van de zestiende eeuw.

Verbeelding en verbeeldingskracht zijn ook de hoofdthema's in hoofdstuk drie, waarin de Nederlandse lezer op bladzijde 55 tot zijn verbazing het bekende leesplankje (aap, noot mies, ...) ziet opduiken als illustratie van de rol van de verbeelding bij het leren lezen. Ook de getallenrechte en de reële getallen komen in die context te voorschijn. Meer in lijn met Gowers getallenbeeld en diens nadruk op spelregels is hoofdstuk 4, getiteld *Permission and laws* en de twee daarop aansluitende hoofdstukken.

Daarna treden imaginaire en complexe getallen meer op de voorgrond. Eerst in historisch verband als hulpmiddel bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen, en daarna in een meer meetkundige zin, als punten in het complexe vlak. In het algemeen ligt de nadruk ook hier op de historische ontwikkeling. Het boek begint dan ook steeds meer het karakter te krijgen van een historische monografie over complexe getallen. Zeer goed gedocumenteerd en prachtig beschreven met tal van erudiete uitwijdingen. Maar intussen lijkt Mazur zijn oorspronkelijke doelgroep van geïnteresseerde leken toch wel definitief achter zich te hebben gelaten. Wat rest is een mooi verzorgd en goed geïllustreerd boek dat echter voor de zelfgekozen doelgroep naar mijn inschatting slechts tot ongeveer halverwege toegankelijk is. Voor wiskundig iets beter ingevoerde lezers (vwo-B-niveau) met een literaire belangstelling blijft het tot het einde toe zeer de moeite waard.

The Pea and the Sun

Hoe abstract ook, de wiskunde in de boeken van Gowers en Mazur is in zekere zin toch nog tastbaar, of in elk geval voorstelbaar. Voorstelbaarheid, *imagination*, is zelfs het hoofdthema bij Mazur. Onvoorstelbare wiskunde lijkt haast een *contradictio in terminis* te zijn. Toch is onvoorstelbare wiskunde precies het onderwerp van het boek van Wapner. Het heeft dan ook als ondertitel *A Mathematical Paradox*. Die paradox is de *Banach-Tarskiparadox* die wel eens volgt geparafraseerd wordt. Neem een (gevulde) bal en verdeel die op een bepaalde manier in eindig veel stukken. Die stukken kun je vervolgens als puzzelstukken zo weer in elkaar passen dat er twee ballen uit ontstaan die elk het oorspronkelijke formaat hebben. Het is goed om even te pauseren om wat hier staat goed tot je te laten doordringen. Dat is namelijk niets minder dan een soort wonderbare balvermenigvuldiging (vergelijk Mattheus 14:19–21). Als dit wonder eenmaal aanvaard is, is het hek van de dam: een gevolg van deze stelling zegt dat een lichaam van welke vorm dan ook, zeg een erwt, in eindig veel stukken kan worden verdeeld die, anders samengevoegd, elke andere van te voren bepaalde vorm en inhoud, zeg die van de zon, kunnen aannemen. Hiermee is de titel van het boek van Wapner verklaard, maar de paradox natuurlijk nog niet. En voordat we besluiten om in het kader van de ondernemende universiteit een eigen bedrijfje op te gaan zetten om deze truc grootschalig met goudstaven te gaan uitvoeren, is het goed om nog even de kleine lettertjes te lezen, oftewel hoofdstuk 5 van het boek waarin alle details van de desbetreffende stelling worden verklaard en bewezen.

Een preciezere vorm van de stelling van Banach en Tarski luidt als volgt:
De eenheidsbal

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

kan worden verdeeld in eindig veel onderling disjuncte delen $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m$ *op zo'n manier dat er rotaties* $\rho_1, \dots, \rho_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m$ *bestaan zo dat* $B = \rho_1 C_1 \cup \dots \cup \rho_n C_n$ *en* $B = \sigma_1 D_1 \cup \dots \cup \sigma_m D_m$.
De crux van de zaak is natuurlijk dat het hier om een existentiestelling gaat. Bewezen wordt dat er zo'n verdeling is, maar er wordt niet constructief aangegeven hoe je zo'n verdeling tot stand kunt brengen. Daar gaat ons businessplan! Sterker nog, de delen waarin de eenheidsbal verdeeld wordt, zijn *onmeetbaar*, dat wil zeggen dat het onmogelijk is er op een redelijke manier een volume (maat) aan toe te kennen. Bij het bewijs van de stelling is dan ook gebruik gemaakt van Zermelo's *keuzeaxioma* dat zegt dat er bij elke collectie verzamelingen $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een verzameling W is die uit elke V_α precies één element bevat.

Wie precies wil weten hoe dit allemaal in zijn werk gaat, moet Wapner lezen. *The Pea and the Sun* veronderstelt geen wiskundige voorkennis. Het is voortreffelijk geschreven, met een uitgebreide historische inleiding waarin eerst de hoofdfiguren: Cantor, Hausdorff, Banach, Tarski, Gödel en Paul Cohen ten tonele worden gevoerd. Vervolgens behandelt Wapner een aantal curieuze legpuzzelparadoxen en drogredeneringen als smaakmakers voor de eerste serieuze gang van de maaltijd die onder meer bestaat uit verzamelingenleer, de begrippen aftelbaarheid en overaftelbaarheid, isometrieën en het keuzeaxioma. Daarna kan het echte werk beginnen: het bewijs van de grote stelling. Verbazingwekkend is dat dit bewijs inderdaad zonder voorkennis gevolgd kan worden: een compliment voor Wapner als docent!

Wapner sluit zijn boek af met een aantal behartigenswaardige beschouwingen over de betekenis van dit soort paradoxale resultaten. Paul Cohen heeft in 1963 bewezen dat het keuzeaxioma onafhankelijk is van het Zermelo-Fraenkelaxiomastelsel (ZF) voor de verzamelingsleer: als ZF zonder het keuzeaxioma consistent is, is ZF mét het keuzeaxioma dat ook, en omgekeerd. Dat betekent dat je als wiskundige de vrijheid hebt om het keuzeaxioma te accepteren of niet. Als je het verwerpt, is er geen Banach-Tarskiparadox en dan zijn er ook geen onmeetbare verzamelingen. Maar voordat je zo'n radicale stap zet, moet je je toch een paar dingen realiseren. Wat zijn de argumenten tegen het gebruik ervan? Dat ze leiden tot paradoxale resultaten? Paradoxaal in welke zin dan? Dat ze strijdig zijn met de dagelijkse ervaring of de intuïtie? Maar het gaat hier om wiskunde, een vrije schepping van de menselijke geest. Trouwens, hoe reëel zijn de reële getallen? Komen die in de werkelijkheid voor? Of zelfs de natuurlijke getallen? Bestaan die in de natuur? "God heeft de natuurlijke getallen geschapen, de rest is mensenwerk." schijnt Kronecker gezegd te hebben. Maar dat is nu juist helemaal bezijden de waarheid. De natuurlijke getallen zijn, net zoals alle getallen, een schepping van de menselijke geest. Waarom zouden we onszelf beperkingen opleggen? Er is al heel wat prachtige wiskunde geschapen die gebaseerd is op het keuzeaxioma. Het is een van de verdiensten van Wapners boek dat het ons over deze vragen aan het denken zet.

Mathematics, A Very Short Introduction, Timothy Gowers, Oxford, Oxford University Press 2002, ISBN 0-19-285361. Nederlandse vertaling: ***Wiskunde, de kortste introductie***, Utrecht, Uitgeverij Het Spectrum, 2003, Vertaling: Jan Willem Nienhuys, ISBN 90-274-7994-1.

Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen), Barry Mazur, London, Allan Lane The Penguin Press, 2003, ISBN 0-713-99630-7.

The Pea and the Sun, A Mathematical Paradox, Leonard M. Wapner, Wellesley MA, A.K. Peters Ltd., ISBN 1-56881-213-2.