

Pieter Moree

Max Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7
53111 Bonn
Duitsland
moree@mpim-bonn.mpg.de

Robert Triest

J. Burggraafstraat 11
1018 WA Amsterdam
r.j.triest@chello.nl

Jack Triest

Windmolen 10
1135 KD Edam
jt.triest@quicknet.nl

Mysterieuze regelmatige lichamen

In het Gallo-Romeins Museum van Tongeren in België staat permanent een oude bronzen dodecaëder tentoongesteld. Niemand kent het praktisch nut van dit voorwerp. De dodecaëder in Tongeren is niet de enige in zijn soort: in het Rheinisches Landesmuseum in Bonn bevindt zich een vergelijkbaar object.

Pieter Moree en Jack en Robert Triest speculeren over de betekenis van deze kunstvoorwerpen. Pieter Moree is getaltheoreticus en wetenschappelijk secretaris van het Max-Planck-Instituut te Bonn, Jack Triest, geschiedkundige, is werkzaam in de logistiek, en zijn broer Robert, wiskundige, informaticus en beeldend kunstenaar, is werkzaam als software ontwikkelaar.

Het laatste, dertiende boek van *De Elementen* van Euclides, geschreven omstreeks 300 voor Christus, eindigt met de constructie van vijf regelmatige lichamen. Dat zijn de *tetraëder* (4 driehoeken), de *kubus* (6 vierkanten), de *octaëder* (8 driehoeken), de *dodecaëder* (12 vijfhoeken) en de *icosaëder* (20 driehoeken). De eerste drie worden ge-

zien als Pythagoreïsch en waren ook bekend bij de Egyptenaren. De laatste twee worden gezien als ontdekkingen door Plato's academie.

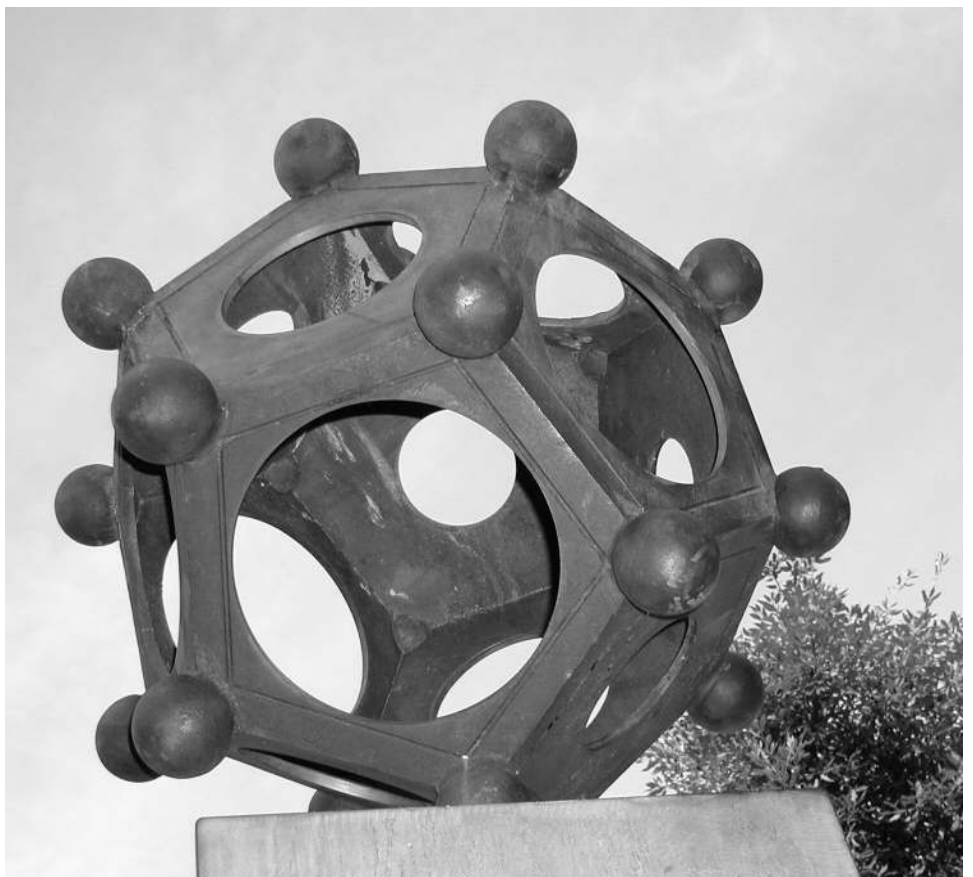
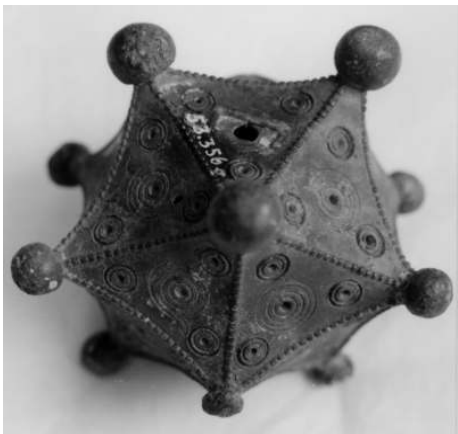
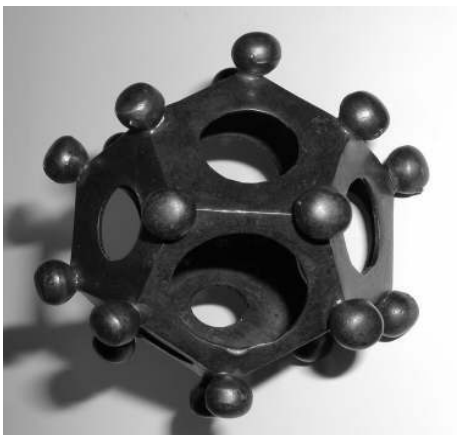
De steentijd

Al veel eerder, tijdens de steentijd, heeft de mens regelmatige lichamen gemaakt. In Schotland zijn meer dan 425 stenen ballen gevonden die gemaakt zijn tijdens de overgang van de late steentijd naar de vroege bronstijd, tussen 3000 en 1500 voor Christus. Archeologen vonden deze granieten ballen in bijvoorbeeld graven, een oude kerk, oude Romeinse kampen en bij de muur van Hadrianus. Eerst werd verondersteld dat de stenen als wapens en knotsen dienst deden, maar de vondst van steeds meer regelmatige lichamen heeft dit min of meer ontkracht. De ballen zijn gemaakt met dezelfde techniek als de Neolithische granieten stenen bijlen en ze hebben dezelfde bewerkingen die we op megalithische bouwwerken tegenkomen. De meeste ballen hebben 6 vlakken (zoals bij een kubus) en zijn gedecoreerd met grote of kleine vlakken. Er

zijn ook ingewikkelder ballen bestaande uit meer dan 6 vlakken gevonden, bijvoorbeeld een dodecaëder. Verder hebben veel ballen versieringen, zoals lijnen, cirkels en spiraalvormen. Niet alle ballen zijn afbeeldingen van wiskundige veelvlakken, want sommige ballen zijn nog helemaal rond met alleen spiraalmotieven of een heleboel puntige knoppen. Ongeveer 390 van deze ballen zijn gecatalogiseerd door het *National Museum of Antiquities of Scotland*.

UGRO's

Er zijn ook voorbeelden van regelmatige lichamen uit de Gallo-Romeinse tijd. Hier in noordwest Europa was dat de periode van de Eburonen en de Nerviërs. De Eburonen waren een Keltisch-Germaanse stam uit de ijzertijd. Ze bewoonden het gebied tussen waar nu Aken, Luik, Maastricht en Belgisch Limburg te vinden zijn. De Nerviërs, een Indo-Europese volksstam, bevolkten vanaf 400 voor Christus de streek tussen Denker en Zenne. Ze deden aan landbouw en kleinveeteelt. Caesar kwam in 57 voor Chris-




Eerste kolom: twee gekerfde stenen ballen (eerste foto: Nat. Mus. of Antiquities of Scotland; uit: Purse, 1974, p. 46, tweede foto: Marischal Mus., Aberdeen (copyright University of Aberdeen), dodecaëdrische UGRÖ (foto: Robert Triest), icosaeëdrische UGRÖ (foto: B. Artmann, Reinisches Landesmuseum, Bonn). Tweede kolom: dodecaëdrische bal (foto: Graham Challifour; uit: Critchlow, 1979, p. 132) en het standbeeld in Tongeren (foto: Robert Triest)

tus in hun gebied aan. Hun regelmatige lichamen staan bekend als de *Gallo-Romeinse Pentagon-Dodecaëders* (ook wel UGRO: Unidentified Gallo-Roman Object). Ze waren populair in de tijd van 300–100 voor Christus. Er zijn zo'n negentig van dergelijke objecten gevonden, waaronder zelfs een icosaeëder (UGRO₂). De UGRO₂ was in de Bonnse bodem beland (in Arloff om precies te zijn) en bevindt zich nu in het archief van het *Rheinisches Landesmuseum* te Bonn. De UGRO's zijn gevonden in de Romeinse provincies langs de Rijn en verder in Engeland, Frankrijk en Zwitserland. Ze zijn gemaakt van gegoten brons. Het origineel, met slechts twee van de twaalf openingen, ook wel productiegaten genoemd, werd in was gemaakt. Daaromheen werd een stevige mal gemaakt en vervolgens werd de mal gebakken waardoor de was smolt en uit de mal vloeide. De mal waarin het origineel als overgebleven ruimte zit wordt volgegoten met vloeibaar brons. De overige tien gaten zijn er later ingeboord en de hoekkogels zijn door verhitting aan het object gelijmd. In één geval stonden er op de zijden de tekens van de die-renriem. Dit is in overeenstemming met een

verklaringsidee waarbij de UGRO de van de aarde zichtbare sterrenhemel representeert. Dit klinkt wat vergezocht, maar voor de Oude Grieken waren de regelmatige lichamen heel bijzonder. Plato (428–348 voor Christus) bijvoorbeeld spreekt in zijn *Timaeus* [3] over de vijf regelmatige lichamen. Het element vuur bestaat volgens hem uit deeltjes die de vorm van tetraëders hebben, lucht uit octaëders, water uit icosaeëders en de grond natuurlijk uit kubussen. Het dodecaëder is volgens Plato door de schepper voor 'het geheel' gebruikt. Hij zou figuren gecreëerd hebben op de zijden van de dodecaëder. Mensen met nog meer fantasie en zonder respect voor het *scheermes van Occam*, zien UGRO's als objecten die door buitenaardsen naar hier met UFO's gebracht zijn en zo zijn er in de loop der tijd heel wat implausibele verklaringen aangevoerd (waarvan een aantal op de wanden rond de UGRO in het *Rheinisches Landesmuseum* te zien is). Naar onze mening blijft het mysterie van de UGRO's vooralsnog onopgelost.

Het Griekse idee dat de harmonie van de regelmatige lichamen zijn weerslag moet heb-

ben in het tastbare universum heeft door de eeuwen heen wetenschappers aangesproken. De beroemde astronoom Kepler probeerde bijvoorbeeld de afstanden van de planeten tot de zon te verklaren met een model van in elkaar bevatte regelmatige lichamen [6]. Het duikt ook weer op in recente pogingen om de geometrie van het universum te bepalen [7].

UGRO's zijn al een aantal malen besproken in de recreatieve wiskundeliteratuur, zie [1] en [2]. Zo publiceerde F. Lindemann, die de transcendentie van π bewees, er al rond 1900 over [4]. Meer archeologische details zijn te vinden in [4] en [8]. Tenslotte wijzen we de lezer op een internetpresentatie van dit artikelje met additioneel beeldmateriaal door Robert Triest [9]. Imitatie-UGRO's zijn te verkrijgen bij Het Gallo-Romeins Museum te Tongeren. 

Met dank aan prof. B. Artmann, dr. Ursula Heimberg (Rheinisches Landesmuseum) en dr. L. Kilford voor hun medewerking en aanstekelijke enthousiasme.

Referenties

- 1 B. Artmann, A roman icosahedron discovered, *Amer. Math. Monthly* 103 (1996), 132-133.
- 2 B. Artmann, Roman Dodecahedra, *The Math. Intelligencer* 15 (1993), 52-53.
- 3 N. Gier and G. Adele, *Plato's Timaeus and the Regular Polyhedra*, <http://www.class.uidaho.edu/ngier/polyhedra/goc.htm>
- 4 M. Guggenberger, Die römischen Dodekaeder. *Eine Gesamtdarstellung*, Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1999, pp. 229.
- 5 T.V. Hightower, *The harmony of the spheres*, <http://home22.inet.tele.dk/hightower>
- 6 J. Kepler, The harmony of the world (Translated from the Latin), *Memoirs of the American Philosophical Society* 209, *American Philosophical Society*, Philadelphia, PA, 1997.
- 7 J. Levin, *How the universe got its spots. Diary of a finite time in a finite space*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- 8 R. Nouwen, De Gallo-Romeinse Pentagon-Dodecaëder: Mythe en Enigma, Publicaties van het Gallo-Romeins Museum Tongeren (België), Nr. 45, Hasselt 1993.
- 9 R. Triest, <http://home.tiscali.nl/~mwdugago> Dodecahedron