Dirk Laurie
Departement Wiskunde
Universiteit van Stellenbosch
7602 Matieland
Zuid-Afrika
dpl@sun.ac.za

SIAM wiskundewedstryd Honderd dollars vir honderd syfers

Uitdagings in numeriese wiskunde

Een beloning van honderd dollar voor het geven van de oplossing van tien problemen uit de numerieke wiskunde: een ongebruikelijke prijs voor een ongebruikelijke wedstrijd, door Nick Trefethen in SIAM News gestart. Dirk Laurie bespreekt het verloop van deze westrijd. Hij werd geboren in Cape Town in Zuid-Afrika. Hij promoveerde in 1977 in de numerieke analyse aan de universiteit van Dundee (Schotland). In 1984 werd hij hoogleraar, eerst aan de Universiteit van Potchefstroom en vanaf 2000 aan de Universiteit van Stellenbosch (beide in Zuid-Afrika).

Op 4 November 2004 het ek 'n lesing oor die inhoud van hierdie artikel by die Technische Universiteit Eindhoven gelewer. Prof. dr. Johannes Boersma het my besoek gereël, en my en my vrou gehuisves en onthaal. Soos hieronder vermeld, was hy tewens intiem gemoeid met die werk wat hier beskryf word. Dit is dus met graagte, maar ook met droefheid, dat ek hierdie artikel opdra aan die nagedagtenis van Joop Boersma, gebore 5 Desember 1937, gestorwe 29 November 2004.

In Januarie 2002 het Nick Trefethen (Oxford) 'n uitdaging [1] aan die lesers van SIAM News gerig: bereken tien gespesifiseerde reële getalle tot tien korrekte syfers elk. Elke getal word gedefinieer as die oplossing van 'n sekere wiskundige probleem, gekies uit 'n paar dosyn soortgelyke probleme wat Trefethen jaarliks gebruik om sy doktorale studente 'n voorsmakie van numeriese analise in die praktyk te gee. Vir die span (een tot ses lede) met die meeste korrekte syfers uit 100 het hy 'n prys van $100 uitgeloof. Sy enigste wenk was: "They're hard!", en hy het gemeen dat selfs vyftig korrekte syfers reeds indrukwekkend sou wees.

Ses maande later [2] moes Trefethen toegee dat hy sy publiek onderskat het. Twintig spanne, waaronder vier eenman-spanne, het volpunte behaal. Hy het nie twintig maal $100 gehad om uit te deel nie, maar 'n anonieme borg het kort daarna tot sy redding gekom. Vier van die deelnemers het in Junie 2004 'n boek oor die wedstryd die lig laat sien [3] waarin elke probleem grondig bespreek word (en die identiteit van die borg onthul word). Een van die ander deelnemers, Johannes Boersma (Eindhoven), het vrywillig die eerste weergawe van al tien hoofstukke van die boek deurgewerk; die spore van sy nougesette redaksionele werk lê op bykans elke bladsy.

In Trefethen se verslag [2] het hy die som van die tien antwoorde met die simbool τ aangedui, en opgemerk: "I wonder how long it will take before someone computes ten thousand digits of this fundamental constant?" Sulke grappies moet 'n mens nie maak teenoor 'n publiek wat reeds bo alle verwagtinge gepresteer het nie, en die skrywers van [3] het vir nege van die tien probleme inderdaad daarin geslaag om tienduisend syfers te bereken. In hierdie artikel beskryf ek kortliks drie van die probleme (in volgorde: nommers 10, 5 en 3) met spesifieke klem op hoe die moeilikheidsgraad van die probleem verander soos die vereiste aantal syfers toeneem. Weens ruimtebeperkings kan nie veel detail gegee word nie; daarvoor moet die leser die boek [3] raadpleeg.

Hier volg Trefethen se formulerings van die drie probleme. Miskien wil die leser hulle bietjie uitprobeer en eers later verder lees!

10. A particle at the center of a 10×1 rectangle undergoes Brownian motion (i.e., 2D random walk with infinitesimal step lengths) till it hits the boundary. What is the probability that it hits at one of the ends rather than at one of the sides?
5. Let $f(z) = 1/\Gamma(z)$, where $\Gamma(z)$ is the gamma function, and let $p(z)$ be the cubic polynomial that best approximates $f(z)$ on

the unit disk in the supremum norm $\|\cdot\|_\infty$. What is $\|f-p\|_\infty$?
3. The infinite matrix A with entries $a_{11}=1, a_{12}=1/2, a_{21}=1/3, a_{13}=1/4, a_{22}=1/5, a_{31}=1/6$, and so on, is a bounded operator on ℓ^2. What is $\|A\|$?

Uitdagings deur die eeue

'n Mens moet nie dink dat uitdagings in numeriese berekening eers in die tyd van die elektroniese rekenaar begin voorkom het nie. Ek gee enkele voorbeelde.

Nadat Archimedes die oppervlakte van 'n paraboliese segment presies kon bepaal, het hy wesenlik dieselfde metode probeer gebruik om die oppervlakte van 'n sirkel te probeer vind. Hierdie keer kon hy slegs boonste en onderste grense bepaal, maar in die proses het hy drie korrekte syfers verkry [4]. Die vindingrykheid en elegansie van Archimedes se algoritme, en die feit dat hy moderne tegnieke soos waaksyfers en intervalrekenkunde vooruitgeloop het, plaas hom onder die grootste numeriese analiste van alle tye.

Hier volg Archimedes se algoritme vir π in moderne notasie. Archimedes self het volstaan met $n=96$, maar die metode is selfs vir hoë akkuraatheid goed bruikbaar: elke iterasie verminder die fout met 'n faktor 4.

$$\text{Inisialiseer}: \quad n=6; \quad S=2; \quad T=\sqrt{3}.$$
$$\text{Itereer}: \quad n \leftarrow 2n; \quad T \leftarrow S+T; \quad S \leftarrow \sqrt{1+T^2}.$$

Telkens is $\sin\frac{\pi}{n}=1/S$ en $\tan\frac{\pi}{n}=1/T$, waaruit volg dat $n/S<\pi<n/T$.

Ons spring nou na die vroeë agttiende eeu. Die differensiaal- en integraalrekening is ongeveer 'n halwe eeu oud. Ondanks die talle suksesse van die nuwe tegniek het twee probleme lank onopgelos gebly:

- Wat is die waarde van $n!$ wanneer n nie 'n heelgetal is nie, spesifiek wanneer $n=\frac{1}{2}$?
- Wat is die waarde van $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$?

James Stirling [5, 6] het beide probleme met sy eie splinternuwe metodes numeries opgelos tot onderskeidelik nege en agttien korrekte syfers. Interessant genoeg kon Stirling slegs in die eerste geval die analitiese antwoord $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ uit die numeriese resultaat herken. Euler het kort daarna [7] met 'n totaal ander redenasie[1] die waarde $\frac{1}{6}\pi^2$ afgelei.

Die tegniek om uit 'n goeie numeriese benadering 'n analitiese waarde te raai, wat met ander metodes bewys moet word, is onlangs gesistematiseer deur Borwein en Bailey [9].

Tien syfers teenoor tienduisend

Die meeste van Trefethen se probleme het hul moeilikheid te danke aan die afwesigheid van 'n voor-die-hand-liggende metode om hulle aan te pak. As 'n mens eers 'n geskikte metode gevind het, kan al tien probleme met betreklik min berekeningstyd gedoen word. Die situasie is heel anders wanneer daar tienduisend syfers eerder as tien gevra word.

Ons sê die kompleksiteit van 'n berekening tot d syfers is $O(d^p)$, waar die eksponent p 'n positiewe reële getal is, indien die tyd wat die berekening benodig, ongeveer eweredig aan d^p is, mits d nie te veel varieer nie.[2] Byvoorbeeld, wanneer d naby 10^4 lê, is die vermenigvuldiging van twee getalle van d syfers, of om die vind van die vierkantswortel van so 'n getal, prosesse van kompleksiteit $O(d^{1.6})$. Die kompleksiteit om e^x of $\sin x$ te bereken, is ongeveer $O(d^2)$.

'n Interessante geval is dié van die gammafunksie: die kompleksiteit om $\Gamma(x)$ te bereken is $O(d)$ vermenigvuldigings, indien sekere konstantes reeds bekend is — maar dit neem $O(d^2)$ vermenigvuldigings om daardie konstantes te vind. Dus is die kompleksiteit van die berekening van die eerste waarde van $\Gamma(x)$ $O(d^{3.6})$, maar verdere waardes kos net $O(d^{2.6})$ elk. As dit een sekonde neem om $\Gamma(x)$ tot 100 syfers te bereken, sal dit tot 1000 syfers 'n bietjie meer as 'n uur neem, want $10^{3.6}$ is ongeveer 3981.

Die drie uitdaagprobleme wat voorts bespreek word, vertoon uiteenlopende gedrag soos die aantal syfers toeneem. Die eerste probleem is een waarvoor gesofistikeerde kennis nodig is om 'n oplossing tot tien syfers te vind — maar die metode se kompleksiteit is slegs $O(d^2)$ en tienduisend syfers is dus maklik. In die tweede geval is dit weer so dat die probleem nie maklik met elementêre metodes gedoen kan word nie; maar omdat die probleem vereis dat $\Gamma(z)$ vir 'n aantal komplekse waardes van z bereken moet word, neem dit 'n paar uur om die probleem tot tienduisend syfers te doen. Die derde probleem kan met algemeen beskikbare programmatuur bykans sonder enige dinkwerk tot tien syfers gedoen word — maar met selfs die mees gesofistikeerde metode is nie eers eenduisend syfers tans haalbaar nie.

Brownse beweging

In die geval van Trefethen se Probleem 10 is die betrokke waarskynlikheid so klein dat simulasie met pseudo-kansgetalle sukkel om selfs een korrekte syfer te kry. Dit is egter bekend dat die digtheidsfunksie van Brownse beweging harmonies is. 'n Ekwivalente formulering is dus:

'n Harmoniese funksie u gedefinieer op 'n 10×1 reghoek se waarde is 1 op die twee kort sye en 0 op die twee lang sye. Wat is die waarde van u by die middelpunt van die reghoek?

In hierdie vorm kan ons Laplace se vergelyking met die gebruiklike vyfpunt-differensiemetode oplos, met stapgroottes $\delta x=\delta y=\frac{1}{n}$, waar n 'n heeltal is; dit lewer benaderings $u_n(x,y)$ wanneer x en y albei roosterpunte is. Op my masjien is $n=128$ nog haalbaar, en lewer drie akkurate syfers.

n	$u_n(0,0)$
1	3.8155269052 10^{-6}
2	**0.**7714342078 10^{-6}
4	**0.**4617982354 10^{-6}
8	**0.**4022278462 10^{-6}
16	**0.38**83130701 10^{-6}
32	**0.38**48934609 10^{-6}
64	**0.38**40422201 10^{-6}
128	**0.383**8296382 10^{-6}

Meer syfers word met behulp van Richardson-ekstrapolasie[3] uit hierdie agt waardes verkry. As die gegewe terme die eerste kolom $m_{j,1}$ van 'n onderdriehoekige matriks vorm, word verdere terme met die rekursieformule

$$m_{j,k+1}=m_{j,k}+\frac{1}{4^k-1}(m_{j,k}-m_{j-1,k})$$

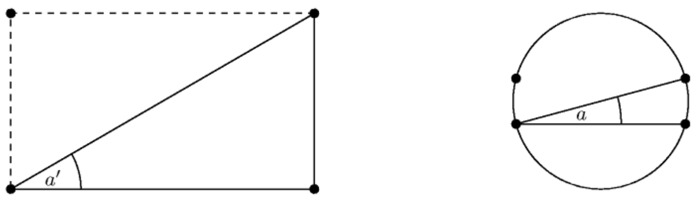
bereken. Ons kry $m_{8,2}=$ **0.3837587776** 10^{-6} en $m_{8,3}=$

0.3837587979 10^{-6}, waarna $m_{8,4}$ en $m_{8,5}$ tot tien syfers gelykl is aan $m_{8,3}$.

Die ekstrapolasiemetode lewer $O(k^2)$ syfers wanneer $n = 2^k$, dus $n = O(2^{\sqrt{d}})$, en enige numeriese oplosmetode vir Laplace se vergelyking benodig $O(d)$ stappe van $O(n^2)$ optellings elk. Die tyd vir 'n berekening tot d syfers styg dus soos $O(d^2 2^{2\sqrt{d}})$, wat gou onhaalbaar word soos d toeneem.

Maar daar is 'n veel beter metode.

Gestel ons beeld die reghoek konform af op die eenheidsirkel, op so 'n manier dat die middelpunt van die reghoek en van die sirkel bo-op mekaar val. Definieer die funksie v deur $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, waar die punt (ξ, η) in die sirkel die beeld van die die punt (x, y) in die reghoek is. Dit is bekend dat v ook harmonies is, en dus is die onbekende waarde $v(0, 0)$ gelyk aan die gemiddelde waarde van v op die sirkel. Maar op die sirkel is v net 0 of 1, dus is die gemiddelde waarde gelyk aan die booglengte van die stuk met waarde 1 gedeel deur die omttek van die sirkel. Kies die afbeelding so dat die vier hoekpunte afbeeld na $(\pm\cos\alpha, \pm\sin\alpha)$ met $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$. Dan is die gevraagde gemiddeld gelyk aan $4\alpha/(2\pi)$.



Die betrokke konforme afbeelding is die bekende Schwarz-Christoffel transformasie, wat in die geval van 'n reghoek in terme van elliptiese integrale uitgedruk kan word. Dit lei na die formule

$$\frac{\operatorname{agm}(1, \sin\alpha)}{\operatorname{agm}(1, \cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'} \tag{1}$$

waar agm Gauss se rekenkundig-meetkundige gemiddeld is, d.w.s. die gemeenskaplike limiet van die rye x_n en y_n gedefinieer deur

$$x_0 = x,\ y_0 = y;$$

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2,\ y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hierdie iterasie konvergeer kwadraties. Die nie-lineêre vergelyking (1) is maklik om op te los: op my werkstasie neem dit 15 sekondes om meer as 14 000 korrekte syfers te kry.

Selfs hierdie metode is nog nie die finale antwoord nie. Daar bestaan 'n tegniek van Ramanujan wat in baie gevalle 'n analitiese formule vir $\sin\alpha$ oplewer indien $\tan\alpha'$ rasionaal is. In hierdie geval lei die tegniek na

$$\sin\alpha = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^2(2+\sqrt{5})^2(3+\sqrt{10})^2(\sqrt{2}+5^{1/4})^4}.$$

Op hierdie probleem het slegs 62 uit 94 spanne 'n poging aangewend — maar dis een van die maklikste probleme uit die oogpunt van baie syfers kry.

Komplekse benadering

Ons kom nou by Trefethen se Probleem 5.

Dit is uit elementêre oorwegings duidelik dat $\|f - p\|$ simmetries is om die x-as en sy maksimumwaarde op die eenheidsirkel aanneem, en dat die koëffisiënte reëel moet wees. Laat

$$p(c_1, c_2, c_3, c_4; z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + c_4 z^3.$$

Die vanselfsprekende manier om hierdie probleem te takel is as 'n minimaks-probleem:
Vind die minimum van

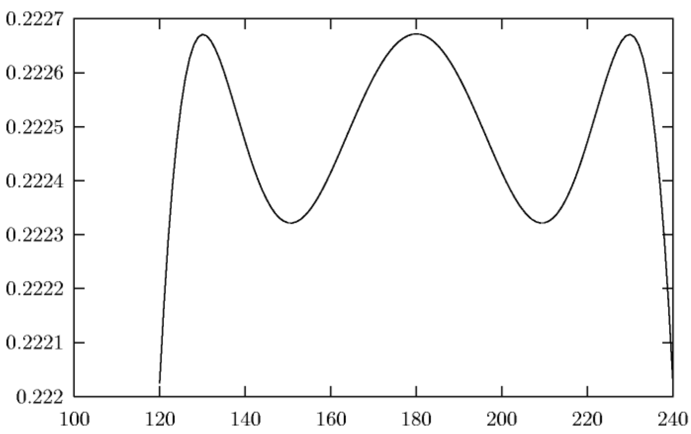
$$g(c_1, c_2, c_3, c_4) = \max_{z \in S} |f(z) - p(c_1, c_2, c_3, c_4; z)|$$

waar S die boonste helfte van die eenheidsirkel is.

Om die probleem hanteerbaar te maak, vervang ons S met

$$S_{180} = \{e^{ik\pi/180}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 180\}.$$

Omdat die maksimum oor 'n kleiner versameling geneem word, behoort dit 'n ondergrens vir die antwoord te gee. Beginwaardes vir die koëffisiënte word verkry deur die supremum-norm met die diskrete L^2-norm te vervang. 'n Tipiese roetine vir die vind van 'n lokale minimum van 'n funksie lewer dan die volgende foutkromme:



Die getalle op die horisontale as in die figuur is die hoek in grade van die betrokke punt op die eenheidsirkel.

Hierdie resultaat is klaarblyklik verkeerd — daar is net drie lokale maksima, terwyl 'n optimale passing deur 'n funksie van vier veranderlikes minstens vyf lokale maksima moet hê. Inderdaad is slegs een syfer van die anwoord korrek.

Om vyf maksima af te dwing, vervang ons die probleem deur sy duaal. Die vyf maksima moet volgens simmetrie by $z_1 = \bar{z}_5 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = \bar{z}_4 = e^{i\theta_2}$, en $z_3 = -1$ wees, waar θ_1 en θ_2 twee onbekende hoeke is. Die maksimin-probleem is dan:
Vind die maksimum van $\epsilon(\theta_1, \theta_2)$, waar $\epsilon = \epsilon(\theta_1, \theta_2)$ die kleinste

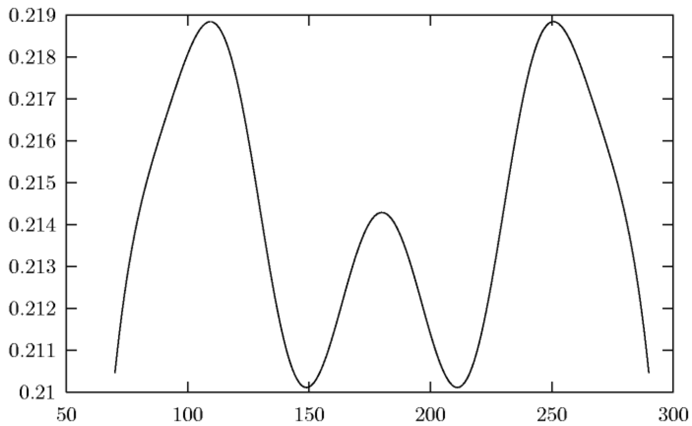
positiewe getal is sodanig dat die vyf vergelykings

$$|f(z_j) - p(c_1, c_2, c_3, c_4; z_j)| = \epsilon$$

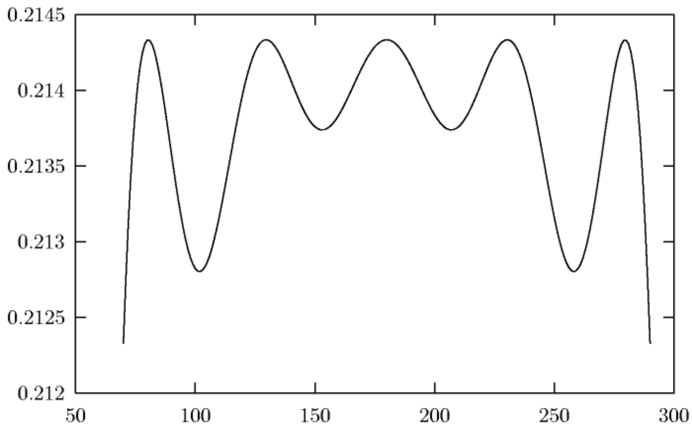
'n oplossing (c_1, c_2, c_3, c_4) het.

Die doelfunksie van bostaande maksimaliseringsprobleem word verkry deur 'n oorbepaalde stelsel van 5 komplekse vergelykings in 4 onbekendes in die supremumnorm op te los. Dit lyk asof dit op sigself 'n nie-triviale taak is, maar hierdie spesiale geval, met presies een meer vergelyking as onbekende, kan in 'n eindige aantal stappe opgelos word [10]. In beginsel sou 'n mens selfs die oplossing in geslote vorm kon skryf.

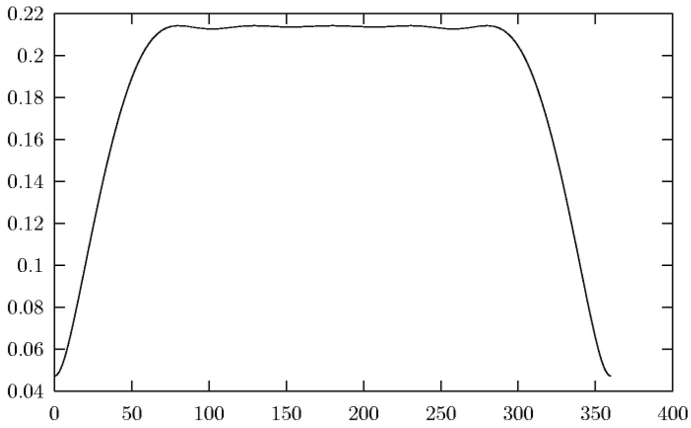
Om te begin, beskou ons alle waardes van θ_1 en θ_2 waar die twee hoeke verskillend is, en elk 'n heeltallige veelvoud van 10°. Die maksimum kom voor by $\theta_1 = 80°, \theta_2 = 130°$. Toevallig is hierdie waardes steeds beste al sou die hoeke met stapgrootte 1° gediskretiseer word. Selfs hierdie oplossing, hoewel beter as die een wat met die vorige metode verkry is (die eerste twee syfers is nou reg), vertoon nog nie vyf maksima nie:



Die metode van direkte soek behels dat toenemend fyner diskretiserings lokaal rondom die gevonde optimum gedoen word. In dubbelpresisie (ongeveer 16 syfers) is dit voldoende om te stop wanneer die stapgrootte 10^{-8} is, aangesien slegs die optimale waarde van ϵ verlang word en nie die optimale waardes van die parameters nie. Die antwoord **0.214335234590459**0 word binne enkele sekondes verkry, en vertoon pragtig die gesogte vyf maksima.



Hierdie grafiek, met die geweldige fyn resolusie op die vertikale as, toon nie hoe ongelooflik plat die foutkromme[4] van die optimale passing oor 'n groot deel van die gebied is nie.



Sulke plat foutkrommes is tipies van polinoombenaderings in die supremum-norm op die eenheidsirkel [11].

As ons tot tienduisend syfers wil werk, is 'n direkte soekmetode nie effektief nie, want die aantal iterasies is eweredig aan die aantal syfers. Maar met beginwaardes reeds so akkuraat, is Newton se metode vir die vind van 'n nulpunt van $\nabla\epsilon(\theta_1, \theta_2)$ heeltemal goed genoeg. Die aantal iterasies om d syfers te kry is eweredig aan $\log d$, maar dit is bysaak. Die berekeningstyd word gedomineer deur die tyd wat dit verg om daardie eerste waarde van Γ by die hoogste akkuraatheid te vind.

Hierdie probleem was die deurslaggewende een van die kompetisie: slegs 22 uit 94 spanne het volpunte behaal, en van daardie 22 spanne was daar net twee wat nie vir al die ander probleme ook volpunte behaal het nie. Nogtans word die probleem nie beduidend moeiliker wanneer daar vir tienduisend syfers gemik word nie.

Die norm in van 'n operator in 'n Hilbertruimte

Die praktiese bereken van die norm van 'n operator A in ℓ^2 word gewoonlik nie as besonder moeilik beskou nie: al wat nodig is, is om $\|A_n\|$ vir n groot genoeg te bepaal, waar A_n die beperking van A tot $\mathbf{R}^n$ is. In die geval van Trefethen se Probleem 3 word die inskrywings van A gegee deur die formule

$$a_{j,k} = a(j,k) = \frac{1}{(j+k)(j+k-1)/2 - k + 1}.$$

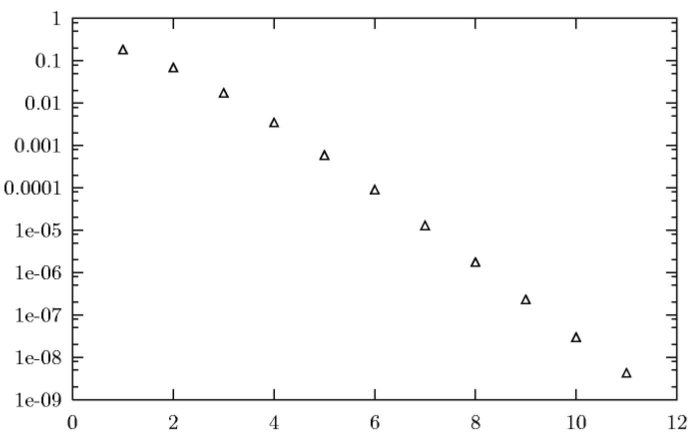
Dit gee byvoorbeeld

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/7 & 1/11 \\ 1/3 & 1/5 & 1/8 & 1/12 & 1/17 \\ 1/6 & 1/9 & 1/13 & 1/18 & 1/24 \\ 1/10 & 1/14 & 1/19 & 1/25 & 1/32 \\ 1/15 & 1/20 & 1/26 & 1/33 & 1/41 \end{bmatrix}$$

$\|A_n\|$ is die grootste singuliere waarde[5] van A_n, en kan maklik met behulp van enige moderne pakket vir numeriese lineêre algebra bereken word. My masjien neem minder as twee minute om die volgende tabel te verkry.

n	$\|A_n\|$
1	**1**.00000000000000
2	**1**.18335017655166
4	**1.2**5253739751680
8	**1.27**004630585408
16	**1.27**352521545013
32	**1.274**11814436915
64	**1.2742**0913129766
128	**1.27422**212003778
256	**1.27422**388594855
512	**1.274224**11845808
1024	**1.274224**14844970
2048	**1.274224152**75182

Dit is voorts maklik om die akkuraatheid van die verkreë waardes te skat deur 'n grafiek van $\|A_{2n}\| - \|A_n\|$ op 'n logaritmiese skaal te maak.



Hier is $n = 2^{m-1}$, waar m die getal op die horisontale as is. Die grafiek toon duidelik dat elke verdubbeling van n die fout in $\|A_n\|$ met 'n faktor ongeveer 8 verklein, en dus is $\|A_{2048}\|$ tot tien syfers gelyk aan $\|A\|$.

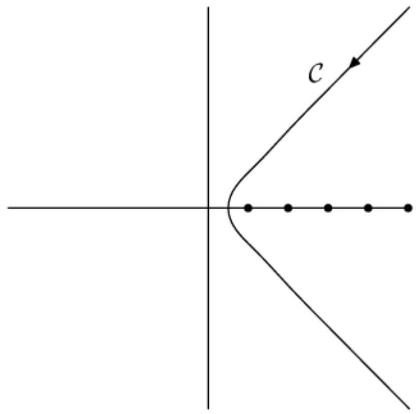
Die oorspronklike probleem 3 kan dus prakties opgelos word sonder om enigsins daaroor na te dink!

Hierdie metode slaag weliswaar daarin om tien syfers te vind, maar word heel gou onhanteerbaar. Om d akkurate syfers te kry, moet die grootte van die matriks ongeveer 2.15^d wees, en hierdie syfer groei eksponensieel met d. Selfs die taak om die matriks A_n in die geheue van die rekenaar te kan berg, is reeds by $d = 20$ onhaalbaar.

Die belowendste metode waaroor ons tans beskik, is om sommasie met integrasie te vervang. Dit is uitvoerbaar omdat $a(k,l)$ ook bereken kan word selfs wanneer k en l nie positiewe heeltalle is nie. 'n Beperkte hoeveelheid vordering kan met die Euler-Maclaurin somformule behaal word — sien [3] vir meer besonderhede. Maar die kragtigste somformule kom van kontoerintegrasie:

As f analities is en voldoen aan $f(z) = O(z^{-1-\epsilon})$ in die gebied links van die gerigte kontoer C, dan geld

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2i}\int_C f(z)\,\cot(\pi z)\,dz$$



Die kontoer C begin by ∞ bo die x-as, kruis die x-as tussen 0 en 1, en gaan weer na ∞ onder die x-as.

Om die integraal te bepaal, gaan ons weer terug na 'n som:

$$\int_C g(z)\,dz \approx S(g,s,h) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(s(kh))\,s'(kh)$$

waar $s : \mathbf{R} \to C$ 'n geskikte parametrisering van die kontoer is. In die gunstigste geval kan s so gekies word dat die konvergensie dubbel-eksponensieel is: d.w.s. die konvergensie van $S(g,s,h)$ is eksponensieel vinnig in k sowel as h. Byvoorbeeld, die parametrisering $s(t) = \cosh(\sinh t - \frac{1}{4}i\pi)$ gee dubbeleksponensiële konvergensie vir 'n wye klas integrande.

Na uitgebreide numeriese eksperimentering het Waldvogel ([3], Hoofstuk 3) sy beste resultate verkry met die eenvoudige formule

$$s(t) = \cosh(t + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{4}i\pi). \qquad (2)$$

Dit lewer vir gegewe $h > 0$ die sommasieformule

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k f(z_k) + \eta(f,h)$$

waar $\eta(f,h)$ die foutterm is, en

$$z_k = s(kh), \quad w_k = -\tfrac{1}{2}ih\,s'(kh)\cot \pi z_k.$$

Vir enige gegewe waarde van h word die getalle w_k en z_k eenmalig bereken.

Ons kry dus vir gegewe h 'n oneindige *komplekse* matriks $G = G_h$ met elemente

$$g_{j,k} = \sqrt{w_j w_k}\,a(z_j, z_k)$$

sodanig dat die eiewaardes van $G^{\mathrm{T}}G$ almal reëel is[6] en eksponensieel vinnig na die eiewaardes van $A^{\mathrm{T}}A$ streef soos h streef na 0. Omdat G_h 'n komplekse matriks is, beteken dit egter dat $\|G_h\|$ *nie* na $\|A\|$ streef nie.

In die praktyk hoef slegs die submatriks van G_h met $-N \le j \le N$, $-N \le k \le N$ gebruik te word, waar N groot genoeg gekies word dat die fout verwaarloosbaar is.

Die parametrisering (2) is so gekies dat die beste keuse van N eweredig aan d/h is. Aangesien die beste keuse van h ongeveer omgekeerd eweredig aan d is, is N ongeveer eweredig aan d^2. In die praktyk kan d nie kontinu gevarieer word nie. Waldvogel het eksperimenteel vasgestel dat die empiriese formule

$$d \approx d(h) = 51.4 \sinh(0.6 \operatorname{arcsinh}(0.021/h))$$

'n goeie skatting van die akkuraatheid by 'n gegewe stapgrootte gee. Byvoorbeeld: om tien syfers te verkry, is $h = \frac{1}{16}$ goed genoeg.

Nou moet die eiewaardes van G nog gevind word. Met Waldvogel se aanbevelings is $n \approx 0.26d^2$, en die aantal inskrywings in die matriks dus ongeveer $0.07d^4$. Dit is onprakties om so 'n matriks in die geheue van 'n rekenaar te berg vir d groter as ongeveer 100, en dus moet 'n iteratiewe metode gebruik word. Waldvogel se empiriese formule is gekoppel aan die gebruik van die magmetode: vanaf 'n beginwaarde $\mathbf{y_0}$ vir die dominante eiewaarde van $G^{\mathrm{T}}G$ word die volgende berekening vir $k = 0, 1, 2, \ldots$, geïtereer:

$$\mathbf{u} = G\mathbf{y}_k, \quad \mathbf{v} = G^{\mathrm{T}}\mathbf{u}, \quad \lambda_k = \frac{\mathbf{y_k}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}}{\mathbf{y}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_k}, \quad \mathbf{y}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}}{\lambda_k}.$$

Dan is $\|G_h\| = \lim_{k\to\infty} \lambda_k^{1/2}$. Die iterasie word gestop wanneer twee opeenvolgende waardes van λ_k verskil met minder as $10^{-d(h)}$.

Die fout in die magmetode bevredig die wet $|\lambda_k - \lambda_\infty| \approx \rho^{2k}$, waar ρ die verhouding tussen die naasgrootste en grootste eiewaardes is. In hierdie probleem is daardie verhouding ongeveer $\rho = 10^{-1.9}$. Die verwagte aantal iterasies is dus ongeveer $d(h)/3.8$. As ons in ag neem dat daar $O(d^4)$ matriksinskrywings is, wat elk $O(d^{1.6})$ tot die berekeningstyd bydra, vind ons dat die totale tyd $O(d^{6.6})$ beloop. Dit kom daarop neer dat 'n verdubbeling van berekeningstyd 'n toename van 10% in die aantal korrekte syfers gee.

Op die oomblik is die beste wat bereik is, 273 korrekte syfers, wat ongeveer 'n maand geneem het om te bereken. Selfs 1000 korrekte syfers lyk totaal buite bereik, om van 10000 nie eers te praat nie.

Hierdie uitdaging is nog bo ons vuurmaakplek!

Notas

1 Het Euler eers Stirling se numeriese waarde gesien, die getal $\pi^2/6$ herken, en toe 'n manier gevind om laasgenoemde te motiveer? Die datums van die publikasies laat hierdie moontlikheid toe, maar as dit so was, is dit vreemd dat Euler in sy brief van 8 Junie 1736 aan Stirling ([8], p. 141–145) geen woord daarvan rep nie.

2 Let wel: hierdie definisie van die groot O-notasie is verwant aan, maar verskil van, die gebruiklike een.

3 Hoewel na 'n twintigste-eeuse weerkundige genoem, is slegs die rekursiewe formulering van hierdie konvergensieversnellingsmetode modern. Die onderliggende formule is eweneens een van James Stirling ([6], p. 159) se uitvindsels.

4 As boorling van Kaapstad put ek groot bevrediging uit die feit dat hierdie grafiek nogal baie na Tafelberg lyk!

5 As λ 'n eiewaarde van $B^{\mathrm{T}}B$ is, dan is $\sqrt{\lambda}$ 'n singuliere waarde van B.

6 Let op: ons werk met $G^{\mathrm{T}}G$, waarin die gewone getransponeerde voorkom, nie die Hermitiese nie: dat die eiewaardes reëel is, is dus nie trivaal nie.

Verwysings

1 Lloyd N. Trefethen. 'A hundred-dollar, hundred-digit challenge', *SIAM News* 35(1), January/February 2002. www.siam.org/siamnews/01-02/challenge.pdf.

2 Lloyd N. Trefethen. 'The $100, 100-digit Challenge'. *SIAM News* 35(6), p. 1–3, July/August 2002.

3 Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, and Jörg Waldvogel. *The SIAM 100-Digit Challenge: A Study in High-Accuracy Numerical Computing*, SIAM, Philadelphia, 2004.

4 T. L. Heath. *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.

5 Jacobus Stirling. *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, London, 1730.

6 Ian Tweddle. *James Stirling's Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling's Text*, Springer, London, 2003.

7 Leonhard Euler. 'De summis serierum reciprocarum', *Comm. Acad. Sci. Petrop.* 7 (1734–1735), p. 123–134, 1740; *Opera Mathematica* 14, p. 73–86.

8 Ian Tweddle. *James Stirling: This about series and such things*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1988.

9 Jonathan Borwein and David Bailey. *Mathematics by Experiment*, A. K. Peters, Natick, 2004.

10 Dirk P. Laurie and Lucas M. Venter. 'A two-phase algorithm for the Chebyshev solution of complex linear equations', *SIAM J. Sci. Comput.* 15(6), p. 1440–1451, 1994.

11 Lloyd N. Trefethen. 'Near-circularity of the error curve in complex Chebyshev approximation', *J. Approximation Theory* 31, p. 344–367, 1981.