

Boekbesprekingen

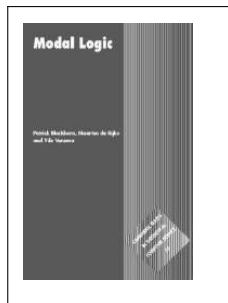
Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.10
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl



P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema

Modal logic

Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

576 p., prijs £33,-

ISBN 0-521-52714-8

As mentioned by the authors in their preface, this book is based on three general ideas: 1. Modal languages are simple yet expressive languages for talking about relational structures. 2. Modal languages provide an internal, local perspective on relational structures. That is, modal formulas are evaluated inside structures, at a particular state. 3. Modal languages are not isolated formal systems. That is, modal languages have corresponding classical languages that describe the same class of structures, be it in a different way. Also, modal logic is linked up with universal algebra via duality theory.

The book is intended for both novices and more experienced readers, in logic, computer science, artificial intelligence, philosophy, linguistics and possibly other fields. Issues in completeness, computability and complexity are addressed. The perspectives provided by correspondence theory and algebra are developed. The authors emphasize the flexibility of modal logic as a tool for working with relational structures and the fact that modal logic is profoundly influenced by its applications, particularly in theoretical computer science. Although the book contains 554 pages, the authors regret that they had to leave out first-order modal systems, non-Hilbert-style proof theory and automated reasoning techniques, provability logic and some other topics. However, in Appendix D, *A Guide to the Literature*, many useful references to textbooks, survey articles and related books are given.

According to the authors, covering the whole book would require 2 semesters, 4 hours a week. But they also suggest a number of one semester courses that could be given using this book: Modal Logic and Relational Structures; An introduction to Modal Logic; Modal Logic for Computer Scientists; Mathematical Aspects of Modal Logic.

Chapter 1, *Basic Concepts*, introduces a number of key modal languages and their interpretation on various kinds of relational structures. Basic concepts such as satisfaction, validity, logical consequence and normal modal logics are introduced. Chapter 1 finishes with a most interesting historical overview of about 10 pages. Chapter 2, *Models*, treats invariance results, bi-simulation, the use of finite models, the standard translation and correspondence theory. In chapter 3, *Frames*, the authors give examples of frame definability and show that relatively simple modal formulas can define frame conditions beyond the reach of any first-order formula. The Goldblatt-Thomason theorem (giving four frame constructions which constitute necessary and sufficient conditions for a class of frames to be modally definable) is proved model theoretically and the Sahlqvist fragment is studied. Canonical models, completeness-via-canonicity proofs, canonicity failure and incompleteness are discussed in chapter 4, *Completeness*. The completeness of Propositional Dynamic Logic (PDL) is shown, extensions of S4.3 are examined and among other things, Bull's theorem, Every normal modal logic extending S4.3 has the fi-

nite frame property, is proved. In chapter 5, *Algebras and General Frames*, the role of algebra in logic is discussed and the Jónsson-Tarski theorem is proved. Next, using duality theory, an algebraic proof of the Goldblatt-Thomason theorem is given. The concept of persistence is introduced and used to prove the Sahlqvist Completeness Theorem. The first part of chapter 6, *Computability and Complexity*, is an introduction to decidability and undecidability in modal logic. The second part of chapter 6 discusses the modal relevance of three central complexity classes (NP, PSPACE, and EXPTIME) and proves Ladner's general PSPACE-hardness result (Every normal modal logic between K and S4 is PSPACE-hard). In chapter 7, *Extended Modal Logic*, the authors talk about some of their favoured examples of extended modal systems. The authors conclude by proving a Lindström Theorem for modal logic.

Each chapter starts with a chapter guide outlining the main themes of the sections that follow and finishes with a summary, and - except the first - with a section entitled *Notes*. Three appendices, called *A Logical Toolkit*, *An Algebraic Toolkit* and *A Computational Toolkit*, respectively, supply basic background information. In addition, the book contains many exercises and is supported electronically at <http://www.mlbook.org>. Summarizing, although the book restricts itself to propositional modal logic, it is very rich in contents and most, if not all, readers will find in it insights or important results he or she was not aware of. Consequently, the book is - due to its extremely rich contents - a major contribution to the field of modal logic.

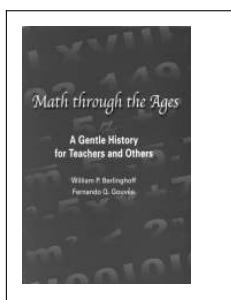
H.C.M. de Swart

'Mathematics today', besluiten ze met het dilemma waar het onderwijs zich voor geplaatst ziet: dat van de vraag uit de wiskundewereld naar een degelijke, wiskundige training naast de vraag uit de samenleving naar een bredere opleiding waarbij meer mensen leren inzien wat wiskunde is.

Het tweede deel beslaat zo'n 130 pagina's waarin in vijftientig sketches aparte, afgeronde onderwerpen worden behandeld. Die variëren van getalnotaties tot het bewijs van de stelling van Fermat. Hierbij wordt op een uitstekende manier aandacht besteed aan de conceptuele problemen die bij de onderwerpen speelden en spelen. Studenten kunnen dit deel goed gebruiken om presentaties over onderwerpen uit de geschiedenis van de wiskunde voor te bereiden.

Resumerend: een zeer leesbaar boek. Bij elk onderdeel staat voor verdere studie een verwijzing naar de literatuurlijst achterin. Ook wordt een aantal websites gegeven die geraadpleegd kunnen worden. Een uitgebreide index besluit het boek. Kortom een aanrader voor alle wiskundeleraars, voor studenten wiskunde en voor geïnteresseerden in dat deel van onze cultuur dat wiskunde heet.

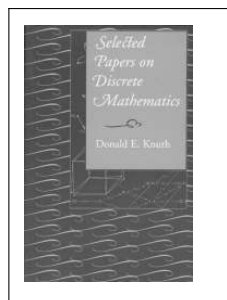
J.M. Notenboom



W.P. Berlinghoff, F.Q. Gouvêa
Math through the Ages. A Gentle History for Teachers and Others
 Farmington: Oxtan House Publishers, 2002
 216 p., prijs \$ 19,90
 ISBN 1-881929-21-3

In het voorwoord zeggen de schrijvers dat het boek ontstaan is uit de behoefte om de geschiedenis van de wiskunde toegankelijker te maken voor leerlingen, studenten en geïnteresseerden. Daar zijn ze voortreffelijk in geslaagd. Beiden zijn vanuit hun werk goed op de hoogte met de geschiedenis van de wiskunde. De manier waarop ze in dit boek het onderwerp toegankelijk maakt heb ik bewonderenswaardig. Er bestaan veel boeken over het onderwerp, maar die geven voor leerlingen en studenten vaak problemen. Veel standaardwerken zijn te uitgebreid zodat het moeilijk wordt een keuze te maken uit de aangeboden tekst. Andere zijn vaak zo compact geschreven dat het lezen voor niet-ingewijden een groot probleem is, zeker als men (nog) geen idee heeft van de wiskundige ideeën die erachter zitten.

Het boek bestaat uit twee delen. In het eerste deel geven ze in 55 bladzijden een overzicht van de geschiedenis van de wiskunde. Ze noemen het overzicht heel toepasselijk: *The History of Mathematics in a Large Nutshell*. Ze beginnen bij de oude culturen en eindigen in de twintigste eeuw. De schrijvers schuwen niet bekende anekdotes en verhalen te vertellen maar geven daarbij heel precies het waarheidsgehalte aan. Kleurrijk is bijvoorbeeld de beschrijving van de persoon Bourbaki. Het laatste onderdeel,



D.E. Knuth
Selected papers on discrete mathematics

CSLI Lecture Notes, 106
 Stanford: Center for the Study of Language and Information, 2003
 812 p., prijs \$ 40,-
 ISBN 1-575-86248-4

Dit boek is deel zes in een serie van acht delen die alle gevuld zijn met artikelen van Donald Knuth. Zijn productiviteit over de afgelopen veertig jaar is daarmee zeer indrukwekkend: alleen dit deel beslaat al meer dan 800 pagina's. De overige delen gaan over digitale typografie en een breed scala aan informatica-onderwerpen.

Voor wie van (discrete) wiskunde houdt is dit boek echt smullen. Alle artikelen bevatten de vereiste voorkennis of geven daarvan een overzicht. Notatie en presentatie is altijd zeer overwogen en zorgvuldig; ik heb geen fouten kunnen ontdekken. Maar bovenal: deze artikelen bevatten een overweldigende hoeveelheid interessante en verrassende observaties.

Het boek bestaat uit 41 hoofdstukken, vrijwel allemaal een afgerond artikel bevattend. De meeste hiervan zijn eerder in een tijdschrift verschenen. Van de meeste is Knuth de enige auteur; elf hoofdstukken hebben co-auteurs. Alle hoofdstukken dateren uit de periode van 1960 tot 1997: tien uit de jaren 60, twaalf uit de jaren 70, zeven uit de jaren 80 en twaalf uit de jaren 90. Voor dit boek zijn de notaties en de lay-out aangepast, en zijn vele artikelen uitgebreid of van een addendum voorzien. Onderwerpen beslaan grafen, matrices, polynomen, projectieve vlakken, coderingstheorie, eindige meetkunde, recurrenente betrekkingen, permutaties, partities en de geschiedenis van de wiskunde. Het laatste kwart gaat over kansen van random grafen op het hebben van bepaalde eigenschappen. Een volledig overzicht van de besproken inhoud is in het bestek van deze boekbespreking onmogelijk; ik beperk me tot enkele krenten uit de pap.

Hoofdstuk 1 is uit 1965 en gaat over het toepassen van com-

puters op combinatorische problemen. Zo is een vermoeden van Euler dat er geen orthogonale n bij n Latijnse vierkanten bestaan als n gelijk is aan 2 modulo 4, onderuit gehaald: het blijkt dat de meeste 10 bij 10 Latijnse vierkanten juist wel een orthogonale wederhelft hebben.

Hoofdstuk 4 uit 1993 gaat over beschouwingen over sommen van machten zoals $\sum_{i=1}^n i^m$ gemaakt door Johann Faulhaber rond 1630. Zo blijkt voor oneven m de gegeven formule altijd een polynoom in $n(n+1)$ te zijn, en zijn deze polynomen tot hoge waarden van m door Faulhaber berekend. Sommige coëfficiënten van door Faulhaber berekende polynomen hebben tellers en noemers van dertien cijfers, en blijken foutloos te zijn. Knuths uitdaging was om de daarbij gebruikte theorie te reconstrueren, en daar is hij uitstekend in geslaagd.

Hoofdstuk 15 uit 1992 wordt door Knuth als een van zijn favorieten bestempeld: hij geeft een uniforme behandeling van een scala aan convolutie-eigenschappen van polynomen zoals hij die in diverse onderwerpen tegengekomen is. Opmerkelijk is dat veel resultaten hier gevonden zijn met behulp van het computeralgebra systeem *Mathematica*.

Hoofdstuk 19 uit 1964 geeft tabellen voor eindige lichamen, waarmee concreet optellingen en vermenigvuldigingen in eindige lichamen uitgevoerd kunnen worden, met de hand of met een computer.

Hoofdstuk 25 uit 1972 bewijst dat het complement van de transitieve afsluiting van het complement van een transitieve relatie altijd transitief is. Als gevolg hiervan zijn, uitgaande van een gegeven relatie, met behulp van complement en transitieve afsluiting nooit meer dan tien verschillende relaties te verkrijgen. Er wordt een voorbeeld van een relatie op vijf elementen gegeven waarbij dit aantal ook echt wordt gehaald. Nog spannender wordt het als ook de reflexieve afsluiting als derde bouwsteen wordt toegevoegd. Dan is het aantal te verkrijgen verschillende relaties hoogstens 42, en met een relatie op negen elementen wordt aangetoond dat 42 ook echt haalbaar is. Zoals zo vaak in dit boek: een zeer verrassend resultaat.

H. Zantema

van een eindig exact rijtje vectorruimten over een lichaam (een getal), dan een niet noodzakelijk exact rijtje (ook een getal) en tenslotte van een eindig rijtje modulen over een geschikte ring (een matrix). Ik kon de definities wel volgen maar ik kreeg geen idee wat de torsie nu eigenlijk over het eindige rijtje zegt.

Het tweede en hoofddeel van het boek behandelt torsies van (eindige) CW-complexen en variëteiten met aan het eind toepassingen op knopen en schakels. Ook hier verkeerde ik in de schizofrene situatie dat de definities wel te volgen waren maar dat de meetkundige betekenis (zo die er is) geheel op de achtergrond bleef. Een treffend voorbeeld is de definitie van Reidemeistertorsie van een n -dimensionaal CW-complex X .

Door middel van de cellen komen we tot een eindig ketencomplex $0 \rightarrow C_n(\tilde{X}) \rightarrow \dots \rightarrow C_0(\tilde{X}) \rightarrow 0$ dat in het algemeen niet exact is ($\tilde{X}$ is de universele overdekking van X). De torsie komt als volgt tot stand: zij π de fundamentealgroep van X , kies een ring Λ zodat zijn eindige machten onderling niet-isomorf zijn en neem een homomorfisme ϕ van de groepenring $Z[\pi]$ naar Λ . We bekijken uiteindelijk het tensorproduct van Λ en het complex met betrekking tot ϕ ; als nu dit nieuwe complex acyclisch is dan is de torsie $\tau_\phi(X)$ gedefinieerd.

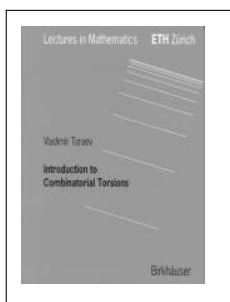
De latere stellingen nemen telkens 'een ring Λ als boven'; mij is niet opgevallen dat er wel eens een concrete Λ werd opgevoerd. Zo wordt het vertrouwen van de lezer dat alles wel goed komt toch danig op de proef gesteld en ik vraag me af of al die algemeenheid in een inleiding wel nodig is.

In het laatste, weer wat kortere, deel besteedt de schrijver aandacht aan torsies die hij zelf ontwikkeld heeft en die weer samenhangen met Seiberg-Witten invarianten.

Bij het lezen van dit boek moest ik aan de metafoor van 'het museum zonder schilderijen' denken: veel theorie en geen voorbeelden. Toegegeven, de torsie wordt toegepast op de classificaties van lensruimten en knopen maar ook daar wordt het verhaal nooit concreet.

Conclusie: ik heb geleerd dat 'een torsie' een algebraïsche invariant is die je kunt gebruiken om ruimten van elkaar te onderscheiden, ik heb een vaag idee gekregen hoe een torsie uit te rekenen, maar als ik aan iemand anders uit moet leggen wat een torsie voorstelt dan sta ik voorlopig met mijn mond vol tanden.

K.P. Hart



V. Turaev (notes by F. Schlenk)
Introduction to Combinatorial Torsions

Lectures in Mathematics — ETH Zürich

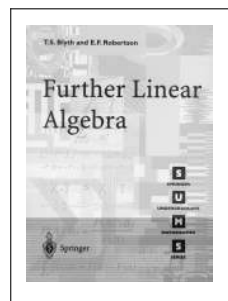
Basel: Birkhäuser Verlag, 2000.

123 p., prijs €22,47

ISBN 3-7643-6403-3

Enige tijd geleden pleitte ik ervoor dat leerboeken niet door specialisten in het desbetreffende vak besproken zouden worden, en wel omdat een niet-specialist wellicht duidelijk zou kunnen maken of de auteur erin geslaagd was het vak (of gebied) wat meer toegankelijk te maken. Het is in deze geest dat ik mij aan de bespreking van dit boek heb gezet; immers, ik wist niets van combinatorische torsies en 'An introduction to' zou deze leemte in mijn kennis kunnen opvullen. Deze kennismaking viel enigszins tegen. Laat ik dit aan de hand van de inhoud van het boek pogen te verduidelijken.

Het boek begint met definities van algebraïsche torsie, eerst



T.S. Blyth, E.F. Robertson
Further linear algebra

Springer Undergraduate Mathematics Series

London: Springer-Verlag, 2002

230 p., prijs €37,40

ISBN 1-85233-425-8

Het te recenseren boek is een cursusboek lineaire algebra en maakt deel uit van de Springer Undergraduate Mathematics Series. Geheel tegen de huidige mode in, is het een sober en dun boek.

Aangezien er al vele boeken over lineaire algebra zijn geschreven, kan een recensent gaan vergelijken en meer eisen stellen. Voor deze recensie heb ik *Further Linear Algebra* vergeleken met

Geometria 1 van E. Sernesi en *Linear Algebra* van Friedberg, Insel en Spence. (Deze keuze is ingegeven door het toeval.)

Further Linear Algebra is een vervolg op *Basic Linear Algebra* van dezelfde auteurs. In *Basic Linear Algebra* worden lineaire ruimtes, bases, de dimensieformule en diagonaliseren behandeld. *Further Linear Algebra* is voor een bacheloropleiding wiskunde geschreven, met meer theorie opgaven dan gebruikelijk. Daarnaast wordt een redelijke algebra-voorkennis verwacht, zo wordt een aantal eigenschappen van quotiëntgroepen gebruikt.

Further Linear Algebra begint met een korte samenvatting van *Basic Linear Algebra* en behandelt inproduct ruimtes, normaalvormen, duale ruimtes, (orthogonale) directe sommen en bilineaire vormen. Het hart van dit boek zijn de normaalvormen van endomorfismen van eindig dimensionale vectorruimten. Er worden zes normaalvormen behandeld. Al deze normaalvormen hebben hun defecten. De belangrijkste is de Jordan-normaalvorm. Deze laatste is de enige normaalvorm die mij meer inzicht biedt in de eigenschappen van de bijbehorende operator.

De hoofdstukken over de overige onderwerpen zijn vrij standaard. De notatie in het hoofdstuk over duale ruimtes wijkt af van de gebruikelijke notaties. Het hoofdstuk over bilineaire vormen bevat een serieuze misser. Volgens stelling 9.6 zou de bilineaire vorm, die het paar vectoren (v, w) naar 0 stuurt, positief definitief zijn.

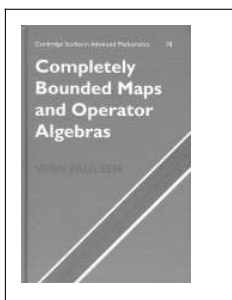
Na de behandeling van de theorie zijn er nog twee toegiften. Er is een hoofdstuk toegevoegd met opgaven die met MAPLE dienen te worden gedaan. Dit zijn voornamelijk grote rekenopgaven, die weinig toevoegen.

Daarnaast zijn biografieën opgenomen van 21 wiskundigen die iets te maken hebben met lineaire algebra, onder anderen Fibonacci en Lie. Dit zijn bewerkingen van biografieën die op de site van de University of Sint Andrews staan.

Een kleine opmerking over de presentatie. Het opmaken van een tekst dient als eerste de leesbaarheid ten goede te komen. In *Further Linear Algebra* worden helaas vaak zodanig grote, cursieve of vette letters gebruikt, dat belangrijke punten niet meer opvallen.

Ik vind *Further Linear Algebra* een matig boek, en de keuze van de onderwerpen aanvechtbaar. Een van de behandelde normaalvormen is een direct gevolg van Schurs Lemma, maar helaas ontbreekt Schurs lemma in deze tekst. Bovendien wordt de relatie tussen lineaire algebra en meetkunde weggelaten. Springer had beter *Geometria 1* van Sernesi in het Engels kunnen vertalen.

R. Kloosterman



H.J. Baues
The Homotopy Category of Simply Connected 4-Manifolds
London Mathematical Society Lecture Notes Series, 297
 Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
 196 p., prijs £25,99
 ISBN 0-521-53103-9

This research monograph covers more than is promised in the title. The author undertakes to construct an algebraic model of the following category $CW(2,4)$: the objects are the connected finite

CW complexes with cells only in dimensions 0, 2 and 4, and the morphisms are the homotopy classes of continuous maps. He also treats several subcategories; among them, for example, the one with as objects the simply connected four-manifolds and as morphisms the maps of nonzero degree.

An object as above is the mapping cone C_f of a certain 'attaching map' $f: \wedge^n S^3 \rightarrow \wedge^m S^2 = M$. The author attacks the problem by first constructing an algebraic model of the following category $T(2,4)$: the objects are maps f as above, and the morphisms from f to g are tuples (ξ, η, τ) . Here ξ (resp. η) is a homomorphism from the 2-homology (resp 4-homology) of C_f to that of C_g , and τ is a 'track' i.e., a homotopy class of homotopies.

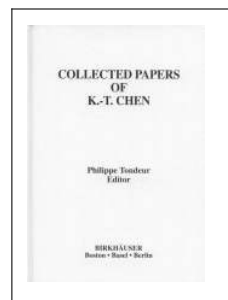
A map f as above is given by n elements of the homotopy group $\pi_3(M)$, which is a direct sum of a subgroup associated to the Hopf map and a subgroup associated to Whitehead products. Similarly, when considering tracks one needs $\pi_4(M)$, which is a similar sum. These observations lead to the consideration of certain quotient categories of $T(2,4)$ where only one such summand is considered. After modelling these T itself is constructed as a pull-back of these quotients.

One of the main tools in analyzing these quotient categories are intricate cubic and biquadratic generalizations of Whitehead's famous universal quadratic map $G \rightarrow \Gamma(G)$ given a group G . These constructions are explained in detail, and the first 5 chapters can be read using a general knowledge of homotopy theory and category theory. In chapters 6 and 7, however, the author leans on the material developed in his book *Combinatorial Homotopy and 4-dimensional complexes*.

Finally it should be mentioned that chapter 8 is an appendix by T. Pirashvili and contains a computation of some of the homology of the category of finitely generated free groups of nilpotence degree two. This refines a lemma needed and proved in chapter 4.

It is remarkable how subtle things become if one tries to model a whole category instead of just maps of a single space. For example, the forgetful map from Poincaré duality spaces to unimodular forms splits for every space X but does not split as an extension of categories.

F. Clauwens



P. Tondeur (ed.)
Collected Papers of K.-T. Chen
Contemporary mathematicians
 Boston: Birkhäuser-verlag, 2001
 737 p., prijs €298,-
 ISBN 0-8176-4005-3

Chen is van oorsprong een topoloog die zich ten tijde van zijn proefschrift (1951–1952) met verknoopte lussen ('links') in de driesfeer bezighield. Hij is evenwel het meest bekend geworden door zijn werk betreffende herhaalde integralen (uit 1967 en daarna), waarover later meer. Dit leidde tot een stelling van De Rham type voor homotopiegroepen en kan gezien worden als een belangrijke stap voorwaarts voor het probleem een complete set van algebraïsche invarianten te vinden voor een gegeven klasse van topologische ruimtes. Zo heeft Chens werk eind jaren zeventig Dennis Sullivan geïnspireerd tot diens bewijs dat het zoge-

naamde **Q**-minimale model van een enkelvoudig samenhangende differentieerbare variëteit een complete invariant van het rationale homotopietype is.

Zoals hierboven is opgemerkt betreft het vroegere werk van Chen (1951-53) de theorie van links in de drie-sfeer en leidde dit tot Milnors werk hierover. Daarna (1953-1965) heeft Chen zich beziggehouden met formele differentiaalvergelijkingen.

Iets over Chens werk, allereerst de herhaalde integralen. Gegeven zij een n bij n matrix $A(x)$ van functies, gedefinieerd in een open deel van $\mathbf{R}^n$, en een punt $x_0 \in \mathbf{R}^n$. De oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = A(x), \quad x \in \mathbf{R}^n; x(0) = x_0$$

kan benaderd worden door middel van herhaal integreren. De herhaalde integralen die voorkomen zijn matrixwaardige functies $I_n(s)$ op het interval $[0, 1]$ van de vorm

$$I_n(s) = \int_{\Delta_n(s)} A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_k) dt_1 \cdots dt_k,$$

waarbij geïntegreerd wordt over het k -simplex

$$\Delta_n(s) = \{(t_1, \dots, t_k) \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k \leq s\}.$$

De som van de vectoren $I_k(s)x_0$ voor $k = 0, \dots, m$ geeft de m -de approximant voor de oplossing $x(s)$. Men spreekt van een *herhaalde integraal van lengte $\leq m$* .

Hoe dit nu toe te passen in differentiaalmeetkundige context? Men gaat uit van een differentieerbare variëteit X en kiest een differentieerbaar pad $x : I = [0, 1] \rightarrow X$ met vast begin- en eindpunt $\gamma(0) = \gamma(1) = *$. Een differentiaalvorm op X produceert bij terugtrekking onder x een 1-vorm op I en k van zulke vormen definiëren zo een herhaalde integraal: schrijf $x^*(\omega_i) = a_i(t)dt$ en substitueer in bovenstaande integraal $a_i(t_i)$ voor $A(t_i)$. Als men k vormen $\omega_1, \dots, \omega_k$ vast kiest, is het eindresultaat een functie op de ruimte $P(X, *)$ van lussen in $(X, *)$ die wordt geschreven als

$$\int \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_k : P(X, *) \rightarrow \mathbf{R}.$$

Deze integraal is een homotopie-functionaal in de zin dat hij onder deformaties van het pad (met vastlaten van begin- en eindpunt) niet verandert. Merk op dat zulke herhaalde integralen (van lengte $\leq m$) een eindig-dimensionale vectorruimte $P_m(X, *)$ vormen. Anderzijds geeft een homotopie-functionaal op $P(X, *)$ een reële functie op de fundamentealgroep $\pi_1(X, *)$ en dus een functie op de groepring $\mathbf{R}[\pi_1(X, *)]$. Een herhaalde integraal van lengte $\leq m$ geeft een functie die nul is op J^{m+1} , de $(m+1)$ -ste macht van het *augmentatie-ideaal* J van de groep-ring. Dit is het ideaal, voortgebracht door de elementen van de vorm $([x] - 1)$, waar x de lussen $x : I \rightarrow (X, *)$ doorloopt. Net als bij de gewone stelling van de Rham krijgen we dus een *integratie-afbeelding*

$$I_m : P_m(X, *) \rightarrow \text{duale van } \mathbf{R}[\pi_1(X, *)]/J^{m+1}.$$

Chens stelling zegt dat dit een isomorfisme van vectorruimtes is, maar onder voorwaarde dat $\pi_1(X, *)$ eindig voortgebracht wordt (zoals het geval is bij algebraïsche variëteiten).

Het belang van deze stelling ligt in het feit dat de ruimte $P_m(X)$ een directe meetkundige interpretatie toelaat als eindig-dimensionaal substituuut voor de ruimte van 1-vormen op de pad-ruimte.

Voor wegsamenhangende en enkelvoudig samenhangende X

is er voor de hogere homotopiegroepen ook een De Rham-stelling. Deze speelt een rol als men een gemengde Hodge-structuur op homotopieniveau wil invoeren, zoals Hain heeft laten zien.

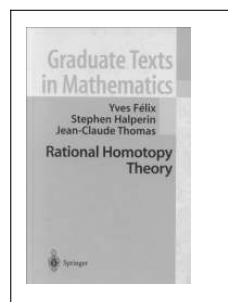
Het verband met oplossingen van differentiaalvergelijkingen blijkt essentieel in het bewijs van de homotopie De Rham-stellingen. Bekijk bijvoorbeeld de bovengenoemde integratie-afbeelding I_m . Rechts staat een eindig-dimensionale representatie van de fundamentealgroep van dimensie zeg N . Hieruit vindt men een rang N -vectorbundel E op X met een platte connectie, zeg met connectie-vorm ω , een matrixwaardige 1-vorm op X . Kies een vector $e_0 \in E_*$ en beschouw zijn parallelle verplaatsing langs het gesloten pad $x : I \rightarrow X$ als een oplossing van de differentiaalvergelijking $x^*\omega = d(e)$. Hierbij wordt $d(e) = e(t)dt$ als onbekende 1-vorm met waarden in $\mathbf{R}^N$ gezien. De oplossing $T(\gamma)$ heet ook wel *transportmatrix*: zij beschrijft parallelle verplaatsing of transport in E langs γ . Als we de lussen x variëren, definieert T de holonomie-representatie.

Nu kan men in plaats van met echte Lie-groepen zoals de matrix groep $GL(N)$ ook met formele Lie-groepen werken. De transportmatrices voldoen dan aan een formele differentiaalvergelijking. De bovenbeschreven oplossing van deze vergelijking met behulp van herhaald integreren blijft geldig. Deze formele theorie gaf Chen de technieken in handen bij het bewijs van zijn De Rham stellingen.

Chen heeft de idee van formele integratie ook in een andere context gebruikt. Zo heeft hij laten zien dat de fundamentealgroep van een compacte algebraïsche variëteit waarvan het aantal reguliere 1-vormen 2 meer bedraagt dan het aantal reguliere 2-vormen zeer groot moet zijn (hij moet een vrije groep van rang 2 bevatten).

Conclusie: deze bundel mag in geen enkele bibliotheek ontbreken. Hij is extra waardevol door de uitstekende inleiding van Hain, een van Chens bekendste studenten.

C. Peters



Y. Felix, S. Halperin, J. Thomas
Rational Homotopy Theory
Graduate Texts in Mathematics 205
 Berlin: Springer-Verlag, 2001
 535 p., prijs €69,50
 ISBN 0-387-95068-0

The difficulty and the charm of homotopy theory is the fact that there is no general algorithm to compute homotopy groups. This differs from the situation in homology theory, where one can readily determine the homology groups of a given space from a geometric description of the space, given for example by a cell decomposition. Moreover, spaces with simple homology (like spheres) usually have complicated homotopy groups, and spaces with simple homotopy groups (like Eilenberg-MacLane spaces) usually have complicated homology. Related is the fact that the cup product is not graded commutative on the cochain level, although it is so on the level of cohomology groups.

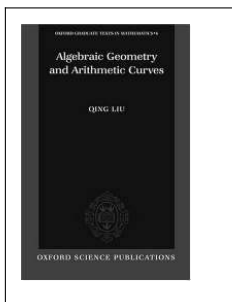
All this changes when one neglects torsion phenomena and restricts ones attention to the rational data. This is testified by the fact that a rational sphere is nearly a rational Eilenberg-MacLane

space and vice versa. On the basis of this there exists a quite effective calculus for the computation of rational homotopy. Also the cup product can be made to be graded commutative on the cochain level. Since this is done by using differential forms it makes it possible to link the homotopy theory directly to differential geometric properties of the space, for example, a Kähler structure. This calculus was pioneered and advocated by D. Sullivan around 1970.

The book is divided into 6 parts, 39 sections and some 170 topics. Each section starts with an introduction of one to two pages, followed by a list of the topics covered. The book is written with a lot of attention to detail and to the clarity of the exposition. This is in sharp contrast with the main older text about this subject: P. A. Griffiths and J. W. Morgan *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* (Birkhäuser, 1981). It contains also lots of interesting examples, and in fact the table of contents is followed by a table of the examples.

Any student who has been introduced to algebraic topology, for example by the splendid book by Munkres, should have no problem to use this book to advance to the level of research problems. Such an introduction is even scarcely necessary, since the first part of about 110 pages covers all the necessary prerequisites. The second part is about Sullivan models. The third is a short intermezzo about graded differential algebra. The fourth part is about Lie models. The fifth part is about the rational Lusternik Schnirelman category. The sixth part is mainly about finiteness questions. The book closes with a section which is a list of 17 open problems.

The only thing which I missed was a section putting some of the techniques used in the more general context of abstract homotopy theory. A beautiful book, and a must-have for anyone working in any subject related with homotopy theory. *F. Clauwens*



Q. Liu (translated by R. Ern )
Algebraic Geometry and Arithmetic Curves
Oxford Graduate Texts in Mathematics
 Oxford: Oxford University Press, 2002
 592 p., prijs  47,50
 ISBN 0-19-850284-2

Dit boek is zowel een leerboek algebraïsche meetkunde als een gedetailleerde verhandeling over arithmetische oppervlakken en de reductietheorie van algebraïsche krommen.

Het leerboekgedeelte beslaat de eerste helft van het boek, ruim 300 bladzijden verdeeld over zeven hoofdstukken. Een inhoudsopgave in het kort: tensorproducten, platheid, completering; de definitie van een schema, gereduceerde en gehele schema's, dimensie; morfismen van eindig type en gesepareerde, propere en projectieve morfismen; normale en reguliere schema's; platte en gladde morfismen en de hoofdstelling van Zariski; (quasi-) coherente schoven en  ech-cohomologie; differentiaal, lokaal volledige doorsneden en dualiteitstheorie; Cartier- en Weildivisoren; de stelling van Riemann-Roch voor projectieve krommen over een lichaam; algebraïsche krommen en de structuur van $\text{Pic}^0(X)$ voor een willekeurige samenhangende projectieve kromme X over een

algebraïsch afgesloten lichaam.

Dit eerste gedeelte van het boek kan het best vergeleken worden met (de eerste vier hoofdstukken van) het klassieke boek *Algebraic Geometry* (Springer-Verlag, 1977) van Hartshorne. Wat direct opvalt is dat Liu vanaf het begin met schema's werkt, terwijl Hartshorne een inleidend hoofdstuk over variëteiten over een algebraïsch afgesloten lichaam bevat. De commutatieve algebra, in essentie afwezig in Hartshorne, is bij Liu geïntegreerd in de tekst. De behandeling van de diverse onderwerpen is bij Liu over het algemeen aanzienlijk gedetailleerder. Hier staat tegenover dat Hartshorne een algemenere cohomologietheorie behandelt dan Liu.

Het tweede gedeelte van het boek bestaat uit drie hoofdstukken met gemiddeld tachtig bladzijden. Eerst worden oppervlakken in detail bestudeerd: het opblazen ervan; gevezelde oppervlakken; de intersectietheorie op een regulier oppervlak en de projectieformule; birationale morfismen; de theorie van minimale en canonieke modellen. Ook is er een paragraaf over excellente schema's. In het laatste hoofdstuk wordt de reductietheorie van algebraïsche krommen behandeld. Nadat de algemene begrippen ingevoerd zijn, komt eerst de reductie van elliptische krommen aan de orde. Dan volgt de definitie van stabiele kromme en tenslotte behandelt Liu het bewijs van Artin en Winters van het centrale resultaat van de reductietheorie: de stelling van Deligne en Mumford dat een gladde projectieve meetkundig samenhangende kromme van geslacht $g \geq 2$ over het quoti ntenlichaam van een discrete valuatie een stabiele reductie bezit over een eindige separabele uitbreiding.

Het tweede gedeelte van het boek mag zonder meer uniek genoemd worden. Nergens anders worden deze zeer belangrijke resultaten in boekvorm zo nauwgezet behandeld als hier.

Het boek is met grote zorgvuldigheid geschreven. Mijn promovendus Lars Halvard Halle heeft grote delen van het boek bestudeerd en is er zeer over te spreken. Op de thuispagina van de auteur vindt de lezer een niet al te lange lijst met errata. De meeste daarvan zijn tamelijk onbeduidend; voor de twee of drie iets serieuzere heeft Liu een correctie geschreven.

Uw recensent kan dit boek van harte aanbevelen aan promovendi in de algebraïsche meetkunde en aan allen die met algebraïsche krommen over discrete valuatie ringen in aanraking komen. De vereiste voorkennis is gering. Ook als leerboek algebraïsche meetkunde is het naar mijn mening bijzonder geslaagd, niet in de laatste plaats vanwege de vele voorbeelden en de meer dan 550 gedetailleerde opgaven. Het Franse origineel lijkt niet in boekvorm beschikbaar te zijn, maar op het resultaat van de vertaling is in elk geval niets aan te merken. Bij deze prestatie van auteur en vertaalster past wat ondergetekende betreft slechts bewondering en dank.

C.F. Faber