

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
craats@science.uva.nl

Vakantiecursus 2004

Islamitische ornamentiek

Symmetrie is in beeldende kunst op een of andere manier altijd aanwezig. Over de psychologie van symmetrie in de kunst is al veel geschreven. Een beroemd werk op dit gebied is 'The Sense of Order' van E.H. Gombrich. In dit artikel verklaart Jan van de Craats de wiskunde achter deze symmetrie aan de hand van patronen in de islamitische ornamentale kunst.

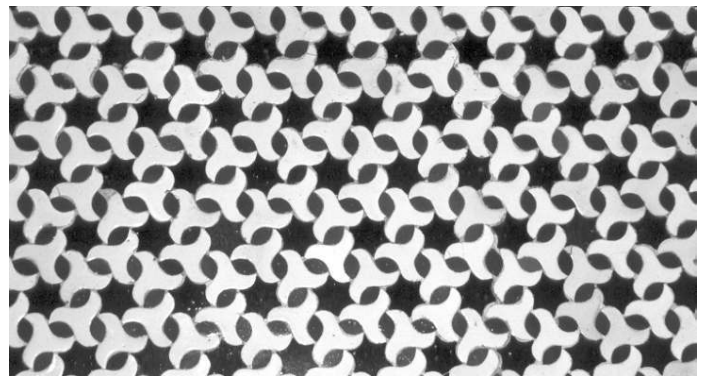
Wie in Andalusië de Moorse paleizen en moskeeën, zoals het Alhambra in Granada, het Alcazar in Sevilla of de grote Mezquita-moskee in Cordoba bezoekt, wordt onmiddellijk getroffen door de verfijnde ornamenten en versieringen. Niet alleen daar, maar ook in de gehele Arabische wereld is zulke ornamentale kunst overvloedig aanwezig: sierlijk gekalligrafeerde Arabische teksten, rijkelijk bewerkte plafonds en mozaïekvloeren en intrigerende veelkleurige wandversieringen in de vorm van regelmatige patronen.

Wat bij die vlakvullingen vooral opvalt is de schier eindeloze variatie in de keuze van de motieven en de kleuren. Maar ook de aard van de symmetrieën vertoont allerlei variaties. Je ziet vierkanten, zeshoeken, stervormige achthoeken, twaalfhoeken, zestienhoeken en allerlei andere motieven die kunstig ineen gevlochten zijn en zich tot aan de randen toe steeds weer blijven herhalen. Sommige motieven zijn spiegelsymmetrisch, andere vertonen draaiingssymmetrie.

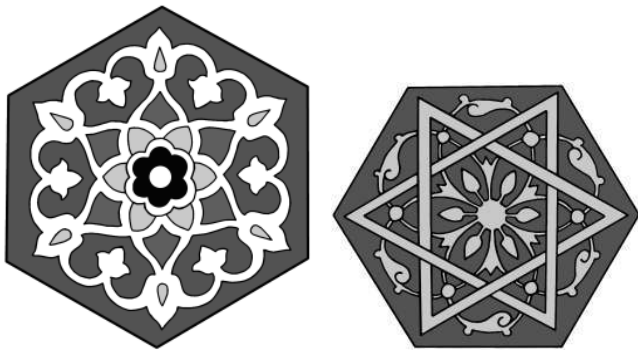
Als je zulke patronen met wiskundige ogen bekijkt, zie je abstracte onderliggende structuren van symmetrietransformaties. Zoals bij alle abstracties doe je daarmee de werkelijkheid geweld aan: je dringt de specifieke vormen van de motieven in het patroon naar de achtergrond. Je concentreert je op de rotaties en spiegelingen die het patroon als geheel in zichzelf overvoeren. Wanneer de motieven van een patroon

zich in een of meer richtingen herhalen, kun je het in gedachten periodiek voortzetten, ook al is het in werkelijkheid begrensd. Je denkt je dan in dat die begrenzing een soort 'venster' vormt waarachter het patroon zich onbeperkt voortzet. Het onbegrensd patroon heeft dan ook translaties als symmetrieën.

Neem bijvoorbeeld het patroon van figuur 1. Je ziet een samenstel van gebogen driepuntige sterren binnen een rechthoekige begrenzing. Wanneer je dat patroon in gedachten naar alle kanten voortzet, zijn er tal van translaties die het in zichzelf overvoeren. Maar ook onder een rotatie over 120 graden rond het middelpunt van zo'n ster gaat het patroon als geheel in zichzelf over. Verder zijn er rotaties over 180 graden en rotaties over 60 graden die het patroon in zichzelf overvoeren. Zulke translaties en rotaties heten *symmetrieën* van het patroon. Ze brengen een *groep* voort, de *symmetriegroep* van het patroon.



Figuur 1 Een patroon uit het Alcazar in Sevilla.



Figuur 2 Turkse Rozetpatronen. Links een rozet met symmetriegroep D_6 , rechts een rozet met symmetriegroep C_6 .

Zoals al eerder gezegd: de wiskundige, groepentheoretische analyse leert alleen iets over de onderliggende structuur, en niets over de specifieke motieven, het kleurengebruik en tal van andere artistiek belangrijke zaken. Bovendien zal blijken dat kleine modificaties de symmetriegroep radicaal kunnen veranderen, terwijl er artistiek gezien nauwelijks iets gewijzigd wordt. Zo kunnen bijvoorbeeld kleine veranderingen in een patroon alle spiegelsymmetrieën verwijderen. Met al dit voorbehoud moet toch vastgesteld worden dat het determineren van symmetriegroepen een uitermate boeiende en stimulerende bezigheid kan zijn.

Isometrieën en symmetriegroepen

Bij een gegeven figuur F in het vlak (zo'n figuur kan van alles zijn: een al dan niet begrensd vlakdeel, een stel punten, een al dan niet begrensd patroon) noemt men een isometrie I van het vlak een *symmetrie van F* als $I(F) = F$. Onder een isometrie van het vlak verstaat men daarbij een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden van puntenparen niet verandert. Voorbeelden van isometrieën zijn lijnspiegelingen, rotaties, translaties en glijspiegelingen (een glijspiegeling is een spiegeling in een lijn gevolgd door een translatie langs die lijn). Men kan aantonen dat *elke* isometrie van het vlak tot een van deze vier types behoort, en ook dat elke isometrie te schrijven is als de opeenvolging van ten hoogste drie lijnspiegelingen. De opeenvolging van twee lijnspiegelingen is een translatie (als de spiegellijnen evenwijdig zijn) of een rotatie (als de assen elkaar snijden). De opeenvolging van drie lijnspiegelingen is een lijnspiegeling (als de assen evenwijdig zijn of door één punt gaan) of een glijspiegeling (in alle andere gevallen).

De symmetrieën van een figuur F vormen een groep, de symmetriegroep $S(F)$ van F . Voor elke figuur F geldt:

1. De identieke afbeelding (id) is bevat in $S(F)$.
2. Als $I_1, I_2 \in S(F)$ dan ook $I_2 I_1 \in S(F)$. Let er hierbij op dat het product $I_2 I_1$ van *rechts naar links* gelezen moet worden, dus eerst I_1 en dan I_2 .
3. Als $I \in S(F)$ dan ook $I^{-1} \in S(F)$.

Voorbeelden:

1. F is een cirkel met middelpunt M . $S(F)$ bestaat dan uit alle rotaties met centrum M en alle spiegelingen in lijnen door M .
2. F is een vierkant met middelpunt M . $S(F)$ bestaat dan uit de rotaties met centrum M over hoeken van $\frac{1}{2}k\pi$ (met $k = 0, 1, 2, 3$) en de spiegelingen in de beide diagonalen en de beide verbindingslijnen van de middens van diametrale zijden.
3. F is de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$. $S(F)$ bevat dan onder andere alle horizontale translaties over gehele veelvouden van 2π , en verder zekere spiegelingen in verticale lijnen, puntspiegelingen

en glijspiegelingen met de x -as als glijspiegel.

Het eerste voorbeeld bevat in zekere zin 'te veel' symmetrie: we zullen in het vervolg slechts figuren bekijken met een *discrete* symmetriegroep, dat wil zeggen dat er bij elk punt P in het vlak een omgeving van P is die buiten P zelf geen beelden van P onder isometrieën uit de symmetriegroep bevat. De voorbeelden 2 en 3 zijn discreet.

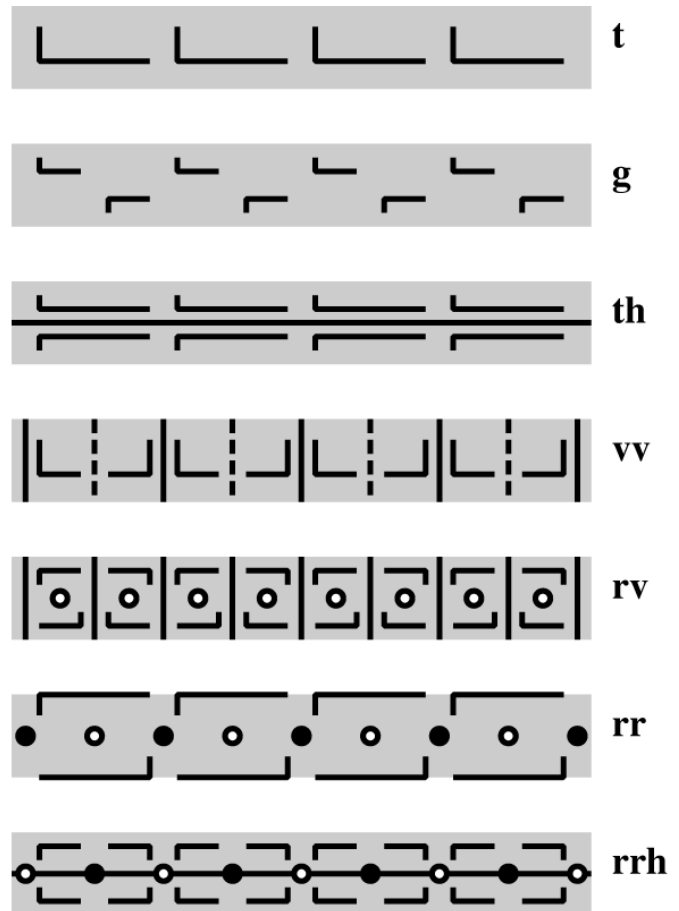
Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale translaties (dat wil zeggen translaties met een positieve translatieafstand), dan is er in elke translatierichting een translatie T met een *minimale* positieve translatieafstand. Elke translatie in die richting is dan te schrijven als T^n voor zekere gehele n . Zijn er translaties in minstens twee verschillende richtingen, dan bestaan er altijd twee translaties T_1 en T_2 zo, dat elke translatie uit de symmetriegroep van de vorm $T_1^n T_2^m$ is voor zekere gehele waarden van n en m .

Bevat een discrete symmetriegroep niet-triviale rotaties (dat wil zeggen rotaties die niet de identieke afbeelding zijn) met een centrum M , dan is er een rotatie R met centrum M en *minimale positieve* rotatiehoek. Die hoek moet gelijk zijn aan $\frac{2\pi}{n}$ voor zekere positieve gehele n . De rotaties in de symmetriegroep met centrum M zijn dan R^k met $k = 0, \dots, n - 1$. Men noemt M in dit geval een n -voudig rotatiecentrum, of, kortweg, een n -centrum.

Als M een n -centrum is en I is een willekeurige symmetrie uit de symmetriegroep, dan is $I(M)$ ook een n -centrum.

Rozetpatronen

Een patroon waarvan de symmetriegroep discreet is en geen translaties bevat, heet een *rozetpatroon*. Er kunnen in zo'n groep geen glijspiege-



Figuur 3 De zeven strookpatronen

Coördinatenstelsels en isometrieën

Een vlak met punten en lijnen waarin voor elk tweetal punten P en Q een afstand $d(P, Q)$ gedefinieerd is, heet een *euclidisch vlak* als er een bijectie van dat vlak naar \mathbf{R}^2 bestaat met de volgende eigenschappen:

1. Elke lijn correspondeert met een verzameling in \mathbf{R}^2 van de vorm $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by = c\}$ waarin a en b niet beide nul zijn.
2. Voor elk tweetal punten P en Q met beelden (p_1, p_2) respectievelijk (q_1, q_2) in \mathbf{R}^2 geldt dat $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

Zo'n bijectie legt een *cartesisch coördinatenstelsel* vast. Het beeld (p_1, p_2) van een punt P onder die bijectie noemt men het *coördinatenpaar* van P . Men schrijft, enigszins slordig, $P = (p_1, p_2)$. In het vervolg laten we de woorden 'cartesisch' en 'euclidisch' weg en spreken we eenvoudig over 'een coördinatenstelsel in het vlak' als we 'een cartesisch coördinatenstelsel in het euclidische vlak' bedoelen.

Zo'n coördinatenstelsel is niet uniek bepaald: bij elk drietal punten A, B en C in het vlak die niet op één lijn liggen, is er een (wél uniek bepaald) coördinatenstelsel met de eigenschap dat $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ met $b > 0$ en $C = (c_1, c_2)$ met $c_2 > 0$. In algemeen gangbaar taalgebruik: A is de oorsprong van het coördinatenstelsel, B ligt op de positieve x -as en C ligt in het bovenhalfvlak.

Definitie: Een *isometrie* I is een afbeelding van het vlak op zichzelf die afstanden behoudt, dat wil zeggen dat voor elk tweetal punten A en B in het vlak geldt dat $d(A, B) = d(I(A), I(B))$.

Lemma: Als een isometrie I twee verschillende punten A en B invariant laat, dat wil zeggen dat $I(A) = A$ en $I(B) = B$, dan laat I elk punt van de lijn door A en B invariant.

Bewijs: Kies een coördinatenstelsel zo, dat $A = (0, 0)$ en $B = (b, 0)$ met $b > 0$ en stel dat $C = (c, 0)$ een ander punt op de lijn door A en B is. Als $I(C) = (x, y)$ dan is $d(A, C) = d(A, I(C))$ dus

$$c^2 = x^2 + y^2$$

en $d(B, C) = d(B, I(C))$ dus

$$(c - b)^2 = (x - b)^2 + y^2.$$

Trekt men de tweede vergelijking van de eerste af, dan ontstaat na

vereenvoudiging $2bc = 2bx$, dus $c = x$ want $b \neq 0$. Substitutie hiervan in de eerste vergelijking geeft vervolgens $y = 0$, en dus is $(x, y) = (c, 0)$. □

Stelling 1: Als een isometrie I drie punten, niet op één lijn, invariant laat, is het de identieke afbeelding (*id*).

Bewijs: Stel A, B en C zijn de gegeven invariante punten en P is een willekeurig ander punt. Als P op een van de lijnen AB, BC of CA ligt, is P invariant op grond van het lemma. Indien P niet op een van die lijnen ligt, is er een lijn door P die twee van die lijnen in twee verschillende punten snijdt. Die punten zijn invariant op grond van het lemma, en P dus ook, opnieuw op grond van het lemma. □

Stelling 2: Als een isometrie $I \neq (id)$ twee invariante punten A en B heeft, is het de spiegeling in de lijn AB .

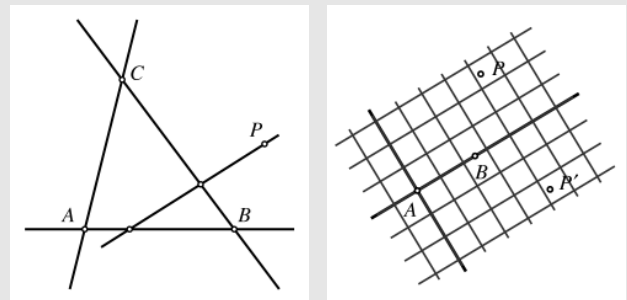
Bewijs: Kies een coördinatenstelsel zo, dat $A = (0, 0)$ en $B = (b, 0)$ met $b > 0$. Voor een punt $P = (x, y)$ met $y \neq 0$ en beeldpunt $P' = I(P) = (x', y')$ geldt dan $d(A, P) = d(A, P')$ dus

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

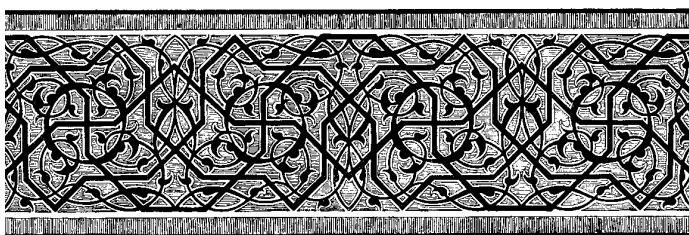
en $d(B, P) = d(B, P')$ dus

$$(x - b)^2 + y^2 = (x' - b)^2 + (y')^2.$$

Aftrekken geeft $2bx = 2bx'$ dus $x = x'$ (want $b \neq 0$) en substitutie hiervan in de eerste vergelijking geeft $y = \pm y'$. Zou $y = y'$ zijn, dan zou $I = (id)$ op grond van stelling 1. Dit is uitgesloten, en dus is $y = -y'$. Dit betekent dat I inderdaad de spiegeling in de x -as is, dat wil zeggen de spiegeling in de lijn AB . □



Figuur 4 Bij de bewijzen van stelling 1 (links) en stelling 2 (rechts)



Figuur 5 Twee Arabische strookpatronen

Zijn er tweevoudige rotatiecentra?

- Ja. Horizontale spiegeling? → rrh
- Ja. → rv
- Nee. Verticale spiegeling? → rr
- Ja. → rv
- Nee. Horizontale spiegeling? → th
- Ja. → th
- Nee. Glijspiegeling? → g
- Ja. → g
- Nee. Verticale spiegeling? → vv
- Ja. → vv
- Nee. → t

Figuur 6 Determinatieschema voor strookpatronen

lingen voorkomen, want het kwadraat van een glijspiegeling is een translatie. Zo'n groep kan dus alleen maar rotaties en lijnspiegelingen bevatten.

Stel dat er meer dan één lijnspiegeling in de symmetriegroep voorkomt. Dan moeten alle spiegellijnen door één punt gaan, want anders zijn er ook weer translaties (als er twee evenwijdige spiegellijnen zijn) of glijspiegelingen (als er drie assen zijn die niet evenwijdig zijn of door één punt gaan). Noem het snijpunt van alle spiegellijnen O . Omdat de groep discreet is, kunnen er maar eindig veel assen zijn. Als het er n zijn, moeten ze opvolgend gelijke hoeken van $\frac{\pi}{n}$ met elkaar maken. Noemen we één spiegelas m_0 dan ontstaan de andere assen m_1 tot en met m_{n-1} uit m_0 door rotatie om O over een hoek $\frac{k\pi}{n}$ ($k = 1, \dots, n-1$). De bijbehorende lijnspiegelingen noemen we S_0, \dots, S_{n-1} .

Het product $R_k = S_k S_0$ is een rotatie met centrum O en rotatiehoek $\frac{2k\pi}{n}$. De groep bevat dus naast de n lijnspiegelingen ook nog n rotaties om O (inclusief de identiteit (id)). Het is een eenvoudige opgave om te bewijzen dat de symmetriegroep verder geen andere symmetrieën kan bevatten. Het gaat hier dus om een groep met $2n$ elementen die de *dihedrale groep* D_n genoemd wordt. Voor $n \geq 3$ is dit de symmetriegroep van een regelmatig n -hoek.

De n rotaties in D_n vormen een ondergroep van index 2, de zogenaamde *cyclische groep* C_n . Patronen met als symmetriegroep een dihedrale groep of een cyclische groep heten rozetpatronen; ze zijn er voor elke $n \geq 1$. Het is niet moeilijk om te bewijzen dat elke discrete symmetriegroep zonder translaties van een van deze beide types is. In figuur 2 staan voorbeelden van rozetten met symmetriegroep D_6 en C_6 .

Strookpatronen

Een patroon met een discrete symmetriegroep die slechts translaties in één richting bevat, heet een *strookpatroon*. We nemen die richting horizontaal. Er moet dan een translatie zijn met een minimale positieve translatieafstand (want de groep is discreet). Stel dat dit T is, en dat $d > 0$ de translatieafstand is. Elke andere translatie is dan van de vorm T^n voor zekere gehele n .

Als de symmetriegroep niet-triviale rotaties bevat, kan de rotatiehoek van zo'n rotatie alleen maar π zijn. Er kunnen dus alleen maar 2-centra zijn. Bovendien moeten al die centra dan op één horizontale lijn liggen, want de opeenvolging van rotaties met rotatiehoek π in twee verschillende centra is een translatie over de dubbele afstand van die centra. De afstand tussen twee rotatiecentra is dus een geheel veelvoud van $\frac{1}{2}d$.

Als de symmetriegroep van een strookpatroon spiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal of verticaal zijn. Er kan hoogstens één horizontale spiegelas zijn. Verticale spiegellijnen hebben een onderlinge afstand die een geheel veelvoud is van $\frac{1}{2}d$.

Als de symmetriegroep van een strookpatroon glijspiegelingen bevat, moet de spiegelas horizontaal zijn want het kwadraat van een glijspiegeling is een translatie. De translatieafstand van de translatiecomponent in een glijspiegeling is een geheel veelvoud van $\frac{1}{2}d$.

In figuur 3 zijn de zeven mogelijke symmetriegroepen van strookpatronen aan de hand van eenvoudige voorbeelden in beeld gebracht. De breedte van het getoonde stuk is telkens $4d$. De hier gehanteerde namen van de groepen zijn ontleend aan karakteristieke isometrieën of combinaties ervan. In \mathbf{t} zijn er alleen maar translaties. De groep \mathbf{g} wordt voortgebracht door een glijspiegeling. In de groep \mathbf{th} zitten translaties en een horizontale spiegeling. In de groep \mathbf{vv} zijn er verticale spiegelingen in twee verschillende soorten assen. In \mathbf{rv} bevinden zich rotaties en spiegelingen in verticale assen die niet door een rotatiecentrum gaan. In \mathbf{rr} zijn er twee soorten rotatiecentra, aangegeven door witte en

zwarte punten, en in \mathbf{rrh} worden die ook nog gecombineerd met een horizontale spiegeling. Aan de hand van het schema van figuur 6 kun je de symmetriegroep bij elk strookpatroon gemakkelijk determineren.

Figuur 5 toont twee voorbeelden van Arabische strookpatronen. De bijbehorende symmetriegroepen zijn \mathbf{g} en \mathbf{rv} .

Behangpatronen

Wanneer de symmetriegroep van een patroon discreet is en translaties in minstens twee verschillende richtingen bevat, spreekt men over een *behangpatroon* (Engels: *wallpaper pattern*) omdat veel patronen op

Eigenschappen van lijnspiegelingen, rotaties en translaties

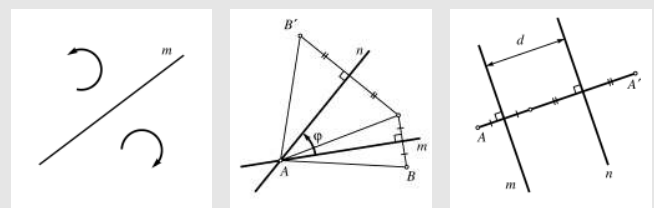
Bij elke lijn m in het vlak is er een uniek bepaalde lijnspiegeling S_m . Er geldt $S_m^2 = (id)$, met andere woorden, twee maal spiegelen in dezelfde lijn geeft hetzelfde resultaat als niets doen. Nog weer anders gezegd: een lijnspiegeling is zijn eigen inverse afbeelding, in formule $S_m^{-1} = S_m$.

Lijnspiegelingen keren de oriëntatie om: een linksom draaiende pijl wordt na een lijnspiegeling een rechtsom draaiende pijl en omgekeerd. (Zie figuur 7, links.)

Als m en n twee lijnen zijn die elkaar in een punt A snijden, en de hoek φ , met $0 < \varphi < \pi$, is de tegen de klok in gemeten hoek tussen m en n , dan is de isometrie $S_n S_m$ (let op de volgorde: eerst S_m toepassen en dan S_n) de *rotatie* met centrum A en rotatiehoek 2φ . Voor elk punt $B \neq A$ met $B' = S_n S_m(B)$ geldt dan $\angle BAB' = 2\varphi$. (Zie figuur 7, midden.)

Rotaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een rotatie met centrum A in twee lijnspiegelingen in lijnen door A , kan één van de twee spiegellijnen vrij door A gekozen worden.

Een bijzondere rotatie is de *puntspiegeling* S_A in A . De rotatiehoek is dan π , en A is het midden van het lijnstuk BB' voor elk punt B . Er geldt dat $S_A^2 = (id)$ dus een puntspiegeling is, net als een lijnspiegeling, zijn eigen inverse. Bij de ontbinding van een puntspiegeling in twee lijnspiegelingen zijn de twee spiegellijnen onderling loodrecht. Omdat een rotatie over π hetzelfde effect geeft als een rotatie over $-\pi$, maakt de volgorde waarin de beide lijnspiegelingen worden uitgevoerd in dit geval niets uit: als $m \perp n$ is $S_m S_n = S_n S_m$.



Figuur 7 Lijnspiegelingen als bouwstenen van rotaties en translaties

Als m en n twee evenwijdige lijnen zijn met een onderlinge afstand $d > 0$, dan is de isometrie $S_n S_m$ (let weer op de volgorde: eerst S_m toepassen en dan S_n) de *translatie* over een afstand $2d$ in de richting loodrecht op m en n , gericht van m naar n . Voor elk punt A met beeld $A' = S_n S_m(A)$ geldt dan dat de vector met beginpunt A en eindpunt A' lengte $2d$ heeft en loodrecht staat op m en n . (Zie figuur 7, rechts.)

Translaties zijn oriëntatiebehoudend. Bij de ontbinding van een translatie in twee lijnspiegelingen in evenwijdige lijnen, kan één van de twee spiegellijnen vrij gekozen worden, maar wel loodrecht op de translaterichting.

Classificatie van isometrieën

Stelling 3: Elke isometrie I is te schrijven als het product van maximaal drie lijnspiegelingen.

Bewijs: We onderscheiden drie gevallen:

1. I heeft minstens twee invariante punten A en B . Dan is I de identiteit of de lijnspiegeling in AB .

2. I heeft precies één invariant punt A . Neem een ander punt B met beeldpunt $B' = I(B)$. De middelloodlijn m van B en B' gaat door A want $d(A, B) = d(A, B')$. De isometrie $S_m I$ heeft dan de invariante punten A en B . Het kan niet de identiteit zijn, want dan zou $I = S_m$ zijn, maar I heeft slechts één invariant punt. Er geldt dus dat $S_m I = S_{AB}$, dat wil zeggen dat $I = S_m S_{AB}$. In dit geval is I dus een rotatie met centrum A .

3. I heeft geen invariante punten. Kies een willekeurig punt B met beeldpunt $B' = I(B)$. Stel dat A het midden is van het lijnstuk BB' en dat S_A de puntspiegeling in A is. De isometrie $S_A I$ heeft dan B als invariant punt. Er zijn nu weer twee mogelijkheden:

(a.) $S_A I$ is een rotatie met centrum B . Schrijf die rotatie als $S_{AB} S_p$ voor zekere lijn p door B (zie figuur 8, links). Dan geldt voor de lijn q door A loodrecht op AB

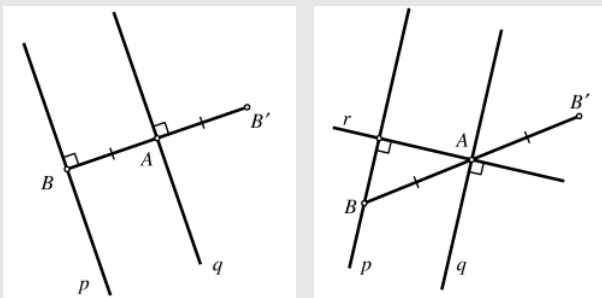
$$I = S_A S_{AB} S_p = S_q S_{AB} S_{AB} S_p = S_q S_p.$$

Dit kan geen rotatie zijn, want I heeft geen invariante punten, dus het is een translatie, met andere woorden, p en q zijn evenwijdig en staan loodrecht op de lijn AB .

(b.) $S_A I$ is een lijnspiegeling in een lijn p door B . Schrijf $S_A = S_q S_r$ met $p \parallel q \perp r$ (zie figuur 8, rechts). Dan is

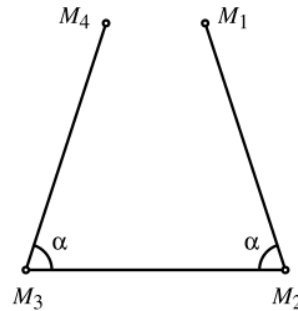
$$I = S_A S_p = S_r S_q S_p = S_q S_r S_p = S_q S_p S_r$$

de glijspiegeling met glijspiegelas r en translatiecomponent $S_q S_p$. Net als de lijnspiegelingen keren de glijspiegelingen de oriëntatie om. □



Figuur 8 Bij het bewijs van stelling 3, geval (3a) (links) en geval (3b) (rechts)

Het bewijs van stelling 3 impliceert ook een volledig overzicht van alle mogelijke isometrieën van het vlak. De *oriëntatiebehoudende* isometrieën zijn de identiteit, de rotaties (waaronder de puntspiegelingen) en de translaties. De isometrieën die de *oriëntatie omkeren* zijn de lijnspiegelingen en de glijspiegelingen. Een glijspiegeling kan opgevat worden als een lijnspiegeling gevolgd door een translatie in de richting van de spiegelas. De volgorde kan daarbij ook worden omgekeerd: eerst de translatie en dan de lijnspiegeling; voor het resultaat maakt dat niets uit.



Figuur 9 Bij het bewijs van de kristallografische beperking

behangpapier deze eigenschap hebben. De symmetriegroep van zo'n patroon heet een behangpatroongroep.

De kristallograaf E.S. Fedorov bewees in 1891 dat er precies 17 verschillende behangpatroongroepen zijn. Omdat zijn artikel in het Russisch geschreven was, bleef het lang onbekend. Zijn resultaat werd in 1924 herontdekt door G. Pólya en P. Niggli. In de Moorse paleizen in Andalusië en op andere plaatsen in de Arabische wereld kan men zulke groepen gerealiseerd zien in schitterende wanddecoraties. Wij zullen hier een overzicht van de 17 groepen geven en een stroomschema waarmee zo'n patroon kan worden gedetermineerd. De notaties die we voor de verschillende groepen zullen gebruiken, zijn ontleend aan de *International Tables for X-ray Crystallography*. Op de aan die naamgeving ten grondslag liggende systematiek gaan we niet in.

De kristallografische beperking

De classificatie van de behangpatroongroepen wordt vereenvoudigd door gebruik te maken van de volgende stelling, die bekend staat als de kristallografische beperking.

Stelling: In een behangpatroon kunnen alleen maar n -centra voorkomen met $n = 2, n = 3, n = 4$ of $n = 6$.

Bewijs: Stel M_1 is een n -centrum. Noem $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Elke isometrie I uit de symmetriegroep die M_1 niet invariant laat, voert M_1 over in een ander n -centrum. Omdat de groep discreet is en translaties bevat, is er een n -centrum M_2 met minimale positieve afstand tot M_1 . De rotatie R met centrum M_2 en rotatiehoek α voert M_1 over in M_3 . Evenzo voert de rotatie R' met centrum M_3 en rotatiehoek α het punt M_2 over in een punt M_4 . Omdat M_1 en M_2 n -centra zijn, zijn M_3 en M_4 het ook.

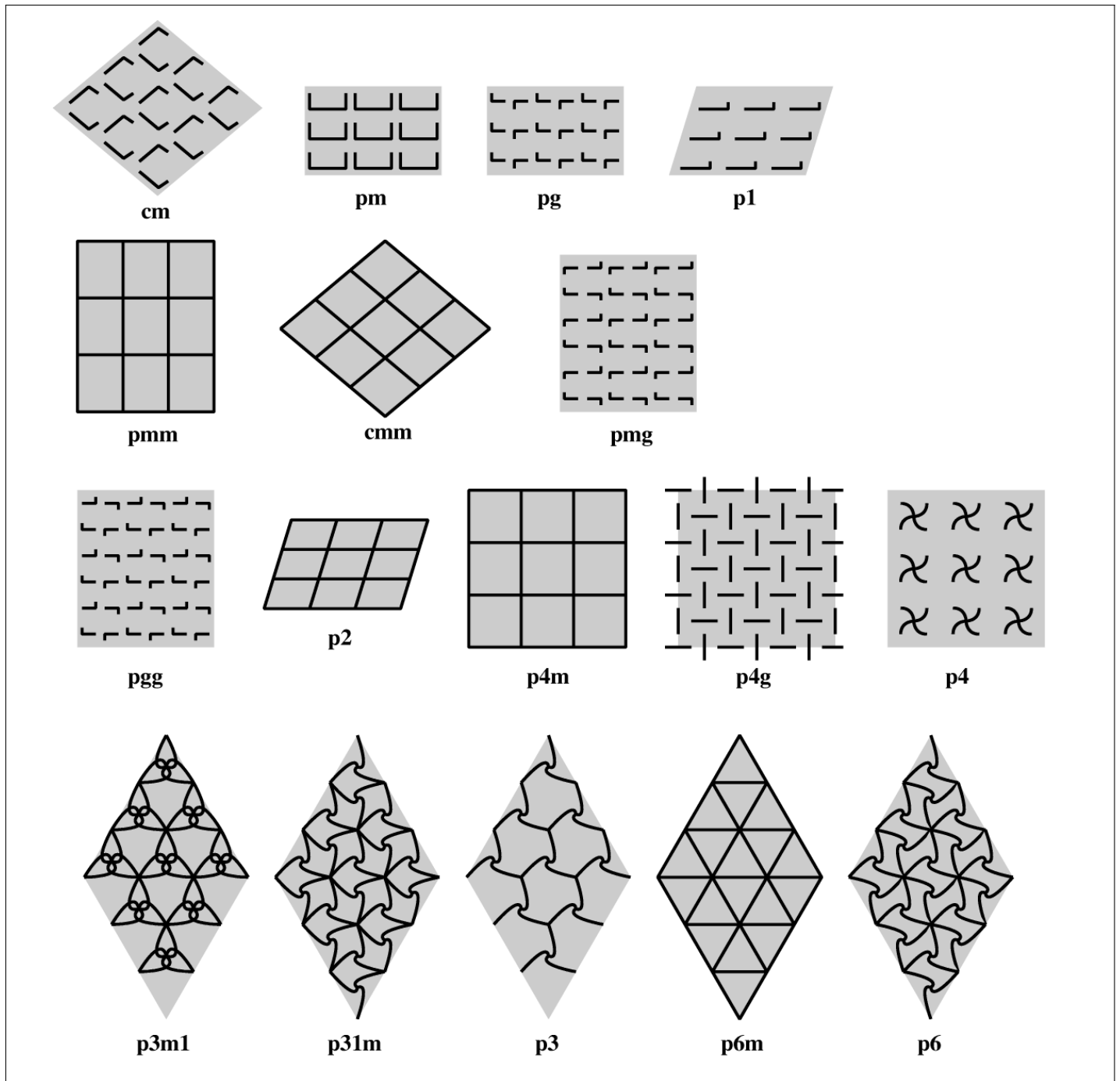
Als $n = 6$ vallen M_1 en M_4 samen. Als $n > 6$ is, ligt M_3 dichterbij M_1 dan M_2 en als $n = 5$ is, ligt M_4 dichterbij M_1 dan M_2 (zie figuur 9). In deze beide gevallen ontstaat dus een tegenspraak, waarmee de stelling bewezen is. □

We zullen laten zien dat 2-centra, 3-centra, 4-centra en 6-centra inderdaad allemaal in behangpatronen kunnen voorkomen.

Het determinatieschema

Bij het determineren van de symmetriegroep van een behangpatroon kijken we eerst naar de *maximale* waarde van n waarvoor er n -centra in het patroon voorkomen. Op grond van de kristallografische restrictie kan n alleen de waarden 2, 3, 4 en 6 aannemen. Als er in zo'n patroon geen rotaties voorkomen, stellen we $n = 1$. We hebben dus vijf hoofdcategorieën: $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$ en $n = 6$. Door vervolgens telkens ja/nee vragen te stellen, komen we uiteindelijk tot de determinatie van de symmetriegroep via het schema in figuur 12. De eerste ja/nee vraag zal telkens zijn of er een lijnspiegeling in de groep aanwezig is.

Zoals uit figuur 10 blijkt, kunnen we bij elk van de 17 behangpa-



Figuur 10 De zeventien behangpatronen

Instructieve opgaven

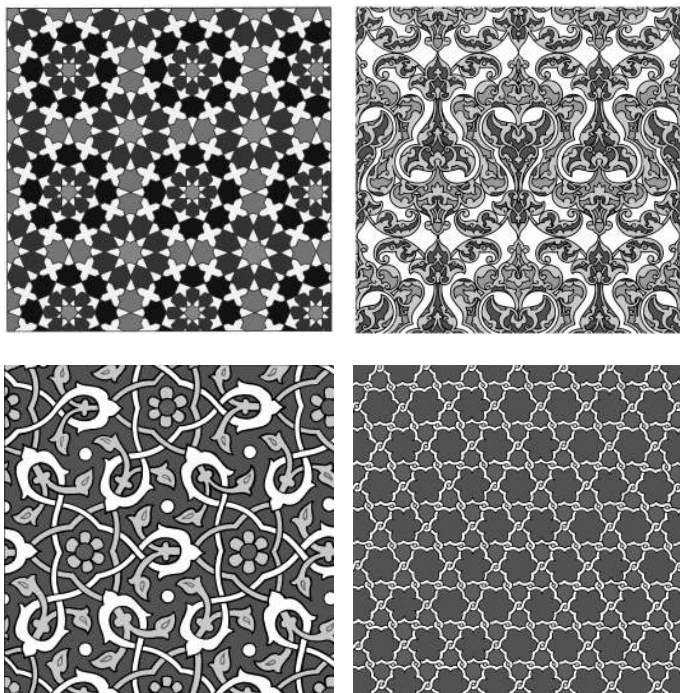
Opgave 1. Bewijs dat de opeenvolging van drie lijnspiegelingen een lijnspiegeling is als de drie spiegellijnen door één punt gaan of onderling evenwijdig zijn, en een glijspiegeling in alle andere gevallen.

Opgave 2. Bewijs: als S een lijnspiegeling met spiegelas m is en I is een willekeurige isometrie, dan is ISI^{-1} een lijnspiegeling met spiegelas $I(m)$.

Opgave 3. Bewijs: als R een rotatie met centrum M is en I is een willekeurige isometrie, dan is IRI^{-1} een rotatie met centrum $I(M)$. Wat is de rotatiehoek?

Opgave 4. Stel R_1 en R_2 zijn rotaties met verschillende centra M_1 en M_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 , respectievelijk. Laat zien dat R_2R_1 een rotatie of een translatie is. Onderzoek wanneer het een translatie is en bepaal het centrum en de rotatiehoek wanneer het een rotatie is.

Opgave 5. Stel R_1 en R_2 zijn niet-triviale rotaties met verschillende centra M_1 en M_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 , respectievelijk. Laat zien dat $R_2^{-1}R_1^{-1}R_2R_1$ een niet-triviale translatie is. (Hieruit volgt dat een eindige symmetriegroep slechts hoogstens één rotatiecentrum kan hebben.)



Figuur 11 Voorbeelden van islamitische patronen. Boven: p4m en pmg; onder: p6 en p3.

troongroepen voorbeelden van zo'n patroon vinden. Samen met het determinatieschema toont dit eigenlijk slechts aan dat er *minstens* 17 verschillende groepen zijn. Het is denkbaar dat er bij sommige eindpunten van de beslissingsboom van het schema twee of meer verschillende groepen horen, en dat er dus een nog fijnere verdeling nodig is. Men kan echter aantonen dat dit niet het geval is. Een soortgelijke opmerking is te maken naar aanleiding van het determinatieschema van de 7 verschillende strookpatronen. Figuur 11 laat vier voorbeelden van islamitische 'behangpatronen' zien. De bijbehorende symmetriegroepen zijn **p4m**, **pmg**, **p6** en **p3**.

Literatuur

Op het internet is heel veel materiaal te vinden over islamitische ornamentale kunst en wiskundige aspecten ervan. Ook zijn er veel websites gewijd aan vlakke symmetriegroepen in het algemeen. Bij de voorbereiding van dit artikel is gebruik gemaakt van [5] en de boeken [1, 4]. Meer wiskundige achtergronden staan in mijn bijdrage aan de CWI-

Vakantiecursus 1998. Veel mooi beeldmateriaal is te vinden in [8–9]. De figuren 2, 5 en 11 zijn hieruit afkomstig.

Het classificatieschema voor behangpatronen heb ik ontleend aan het boekje van Farmer (pagina 58), die zich op zijn beurt beroept op het boek van Washburn en Crowe.

De syllabus *Structuur in schoonheid* [6], met vele illustraties in kleur, is verkrijgbaar bij het CWI.

Stel n is de grootste waarde waarvoor er n -voudige rotatiecentra in het patroon voorkomen. Als er geen rotatiecentra zijn, nemen we $n = 1$.

$n = 1$. Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Is er een glijspiegelas die geen spiegelas is?	
Ja.		→ cm
Nee.		→ pm
Nee.	Is er een glijspiegeling?	
Ja.		→ pg
Nee.		→ p1
$n = 2$. Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Zijn er spiegellijnen in twee richtingen?	
Ja.	Liggen alle 2-centra op spiegellijnen?	
Ja.		→ pmm
Nee.		→ cmm
Nee.		→ pmg
Nee.	Is er een glijspiegeling?	
Ja.		→ pgg
Nee.		→ p2
$n = 3$. Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Liggen alle 3-centra op spiegellijnen?	
Ja.		→ p3m1
Nee.		→ p31m
Nee.		→ p3
$n = 4$. Is er een lijnspiegeling?		
Ja.	Zijn er spiegellijnen die elkaar onder een hoek van 45° snijden?	
Ja.		→ p4m
Nee.		→ p4g
Nee.		→ p4
$n = 6$. Is er een lijnspiegeling?		
Ja.		→ p6m
Nee.		→ p6

Figuur 12 Determinatieschema voor behangpatronen

Referenties

- 1 H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd. ed., John Wiley and Sons, Inc., 1969
- 2 Jan van de Craats, *De vlakke meetkunde terug op school*, in: Meetkunde, oud en nieuw, Syllabus van de Vakantiecursus 1998, CWI, Amsterdam, 1998.
- 3 David W. Farmer, *Groups and Symmetry*, AMS, Mathematical World, vol. 5, 1996, ISBN 0-8218-0450-2
- 4 L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1965.
- 5 Doris Schattschneider, *The plane symmetry groups: their recognition and notation*, American Mathematical Monthly 85 (1978), 439-450.
- 6 *Structuur in Schoonheid*, Syllabus van de CWI-Vakantiecursus 2004, CWI Syllabus 53, ISBN 90-6196-524-1
- 7 Dorothy Washburn and Donald Crowe, *Symmetries of Culture*, University of Washington Press, 1988
- 8 *Islamic Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 9057680289
- 9 *Turkish Designs*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam 2002, ISBN 905768036X