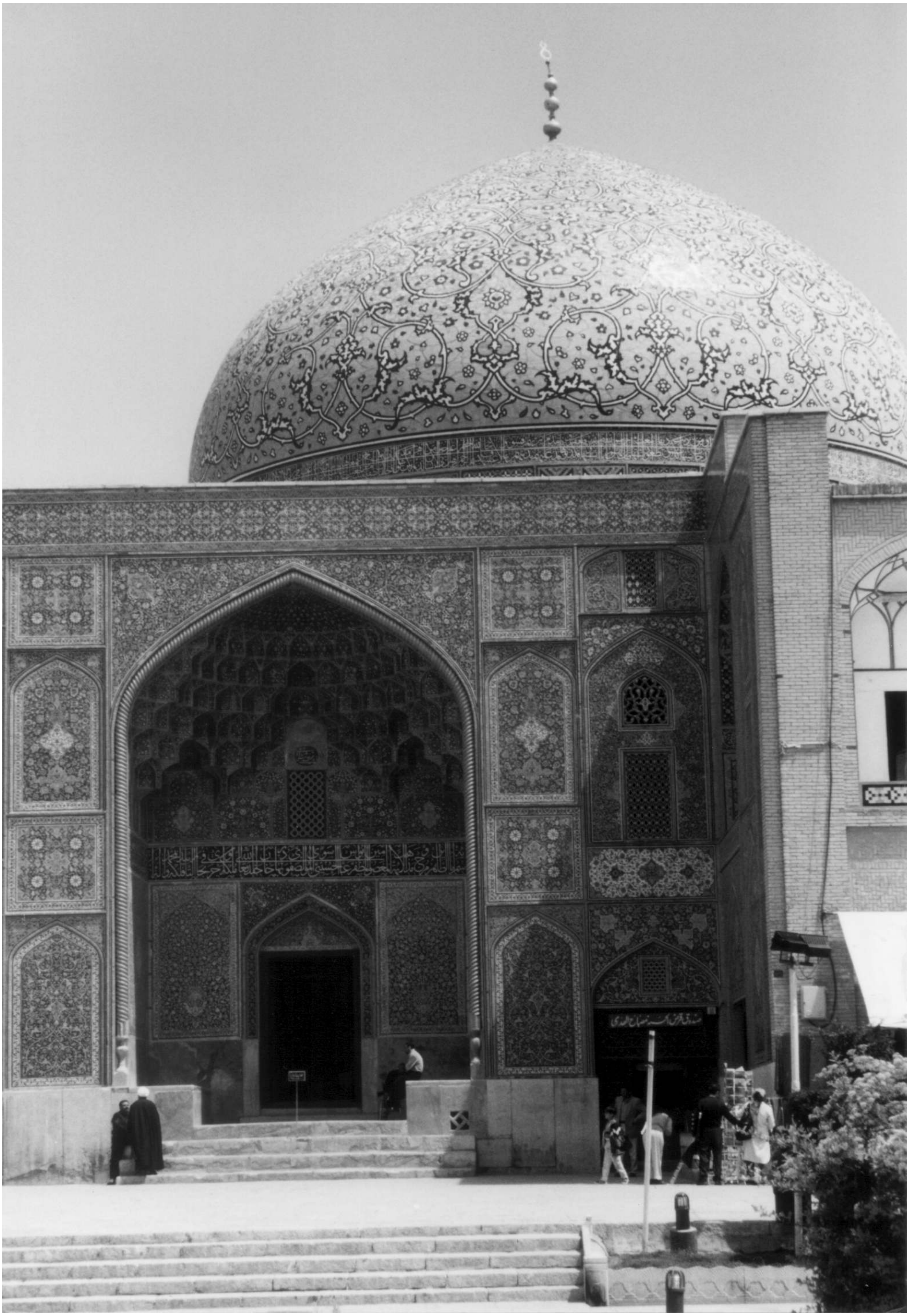


foto: Jan P. Hogendijk

Jan P. Hogendijk
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
hogend@math.uu.nl

Vakantiecursus 2004

De Sleutel tot de Rekenkunde van al-Kāshī

De islamitische cultuur kent een zeer lange wiskundige traditie. Dit blijkt in eerste instantie uit Arabische wiskundige en astronomische geschriften en instrumenten. Maar het is ook te zien aan middeleeuwse islamitische gebouwen, waar uitgebalanceerde verhoudingen en rijke, meetkundig geïnspireerde ornamentiek in het oog springen. In dit nummer besteden we aandacht aan de islamitische wiskunde door twee artikelen. Jan van de Craats schrijft over symmetriegroepen in het artikel 'Islamitische ornamentiek' en Jan Hogendijk laat aan de hand van de rekenkunde van al-Kāshī zien op welke vele manieren poortbogen in de vijftiende eeuw konden worden geconstrueerd. Beide teksten zijn eerder verschenen als onderdeel van de Vakantiecursus 2004, georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Jan Hogendijk is verbonden aan de mathematische instituten in Utrecht, Leiden en Dhahran (Saoedi-Arabië) en is expert op het gebied van islamitische wiskunde.

Toen de profeet Mohammad omstreeks 610 met zijn prediking begon, was zijn woonplaats Mekka een handelsstad. In het midden van de stad lag de ka'aba, een nagenoeg kubusvormig bouwwerk dat als tempel diende voor diverse plaatselijke goden. Dit heiligdom trok veel pelgrims naar Mekka. Mohammad riep op tot islam ('overgave') aan de enige werkelijke God, Allah ('de (ene) God'), en tot afschaffing van de goden die in de ka'aba werden aanbeden. De meeste rijke handelaren in Mekka hadden weinig op met deze nieuwe leer, die in het begin voornamelijk door arme mensen werd aangenomen. In het jaar 622 namen Mohammad en de andere Moslims ('de overgegevenen', dat wil zeggen aan Allah) de wijk naar het enkele honderden kilometers naar het noorden gelegen Yathrib, later Medīnatu n-nabī ('Stad van de profeet') genoemd. Enkele jaren later slaagden de Moslims erin Mekka te veroveren, en onmiddellijk daarna werden op last van Mohammad de godenbeelden in de ka'aba vernietigd. Vanaf dat moment is de ka'aba zonder verdere franje voor alle Moslims een symbool van de eredienst aan Allah. Nog steeds brengen de Moslims overal op de wereld hun gerichtheid op Allah tot uitdrukking door elke dag in de richting van de ka'aba te bidden.

Figuur 1 Koepel van de Lotfollah moskee

De moskeeën hebben in principe dezelfde sobere, bijna wiskundige stijl als de ka'aba. We vinden er geen afbeeldingen van de profeet of heiligen, en zelfs geen afbeeldingen van levende wezens in het algemeen. Kalligrafie (van koranverzen) en geometrische figuren zijn wel toegestaan. Dit was een gunstige voorwaarde voor de ontwikkeling van een islamitische architectuur en ornamentiek gebaseerd op meetkundige vormen. Deze architectuur werd ook voor profane bouwwerken gebruikt. In de bijdrage van Jan van de Craats worden de mozaïeken van het Alhambra in Granada en het Alcazar in Sevilla gebruikt om het moderne groepsbegrip te illustreren. Van de Craats laat hiermee iets zien van de tijdloze dimensie van de islamitische kunst, en ook van het potentieel hiervan om een idee van de schoonheid van de wiskunde over te brengen aan een breed publiek met algemene interesse in cultuur. Uiteraard hadden de ontwerpers van de mozaïeken niet de beschikking over het moderne groepsbegrip. Waarschijnlijk hadden de meesten van hen helemaal geen belangstelling voor theoretische meetkunde in de stijl van de *Elementen* van Euclides, die in de middeleeuws islamitische cultuur wel uitgebreid werd bestudeerd door sterrenkundigen.

Er zijn niet veel details bekend over de ontwikkeling van de islamitische geometrische kunst en architectuur. Bijna geen middeleeuws Arabische en Perzische documenten over constructie van gebouwen en mozaïeken zijn bewaard gebleven. Een mogelijke verklaring is dat de ontwerpen geheim gehouden werden. Ook is het goed mogelijk dat de meeste werktekeningen die echt gebruikt werden, door dit gebruik versleten zijn en daarna zijn weggegooid. Een waarschijnlijk zestiende-eeuwse rol met tekeningen zonder begeleidende tekst is ontdekt in het Topkapß paleis te Istanbul, en gepubliceerd in een prachtige maar zeer moeilijk verkrijgbare facsimile-editie [12]. Als met deze tekeningen ooit mozaïeken of ornamenten zijn gemaakt, dan is dit waarschijnlijk in Noordwest Iran gebeurd. Ook is er een Perzisch handschrift met constructietekeningen en korte verklaringen in de Parijse Bibliothèque Nationale. Dit handschrift is gepubliceerd in een modern Perzische 'vertaling' en in Russische vertaling, maar in Westerse talen is er niet veel over geschreven [8]. Veel patronen in dit handschrift zijn wiskundig interessant, omdat ze niet met passer en liniaal kunnen worden geconstrueerd. Wat dit met de praktijk te maken heeft is niet erg duidelijk, want tot voor kort zijn deze patronen nooit op bestaande gebouwen gevonden. In april 2004 heb ik een uit regelmatige zevenhoeken bestaand mozaïek in het handschrift 'in het echt' gevonden in de Noordelijke koepel van de Vrijdagsmoskee in Isfahan, die in de elfde eeuw werd gebouwd.

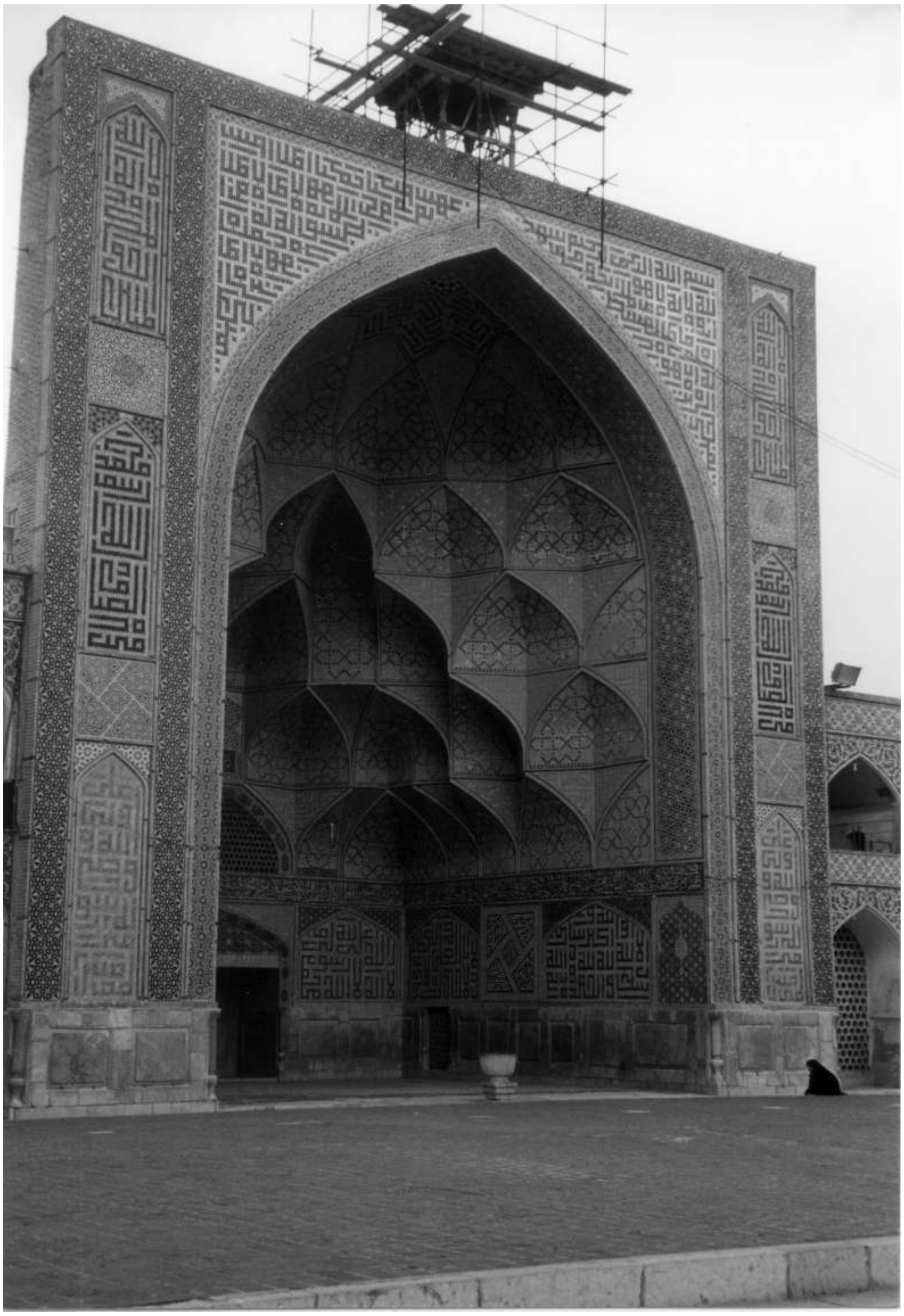


foto: Jan P. Hogendijk

Figuur 2 Vrijdagsmoskee te Isfahan

Er is wel een middeleeuwse tekst bekend waarin uitgebreid aan islamitische architectuur gerekend wordt door een wiskundige. Dit is de *Sleutel tot de Rekenkunde* van al-Kāshī, geschreven omstreeks 1425. Toen al-Kāshī de *Sleutel tot de Rekenkunde* schreef, verbleef hij in Samarkand in het tegenwoordige Oezbekistan, waar in die tijd veel nieuwe gebouwen werden neergezet. Al-Kāshī heeft wel met bouwlieden gesproken, want hij vermeldt een technische term die zij gebruiken voor de opening van een boog. Zijn boek heeft echter als doelstelling rekenen en de bepaling van oppervlakten en inhouden. Hij zegt niets over hoe de gebouwen werden geconstrueerd, en ook niets over de eventuele symbolische betekenis van de gebruikte vormen, en dus licht hij ons niet in over een aantal zaken die we ook graag zouden willen weten. Zijn werk is wel een authentieke bron uit de islamitische traditie, en interessant voor kunsthistorici omdat het in elk geval laat zien welke soort wiskunde in die traditie beschikbaar was.

Al-Kāshī en zijn Sleutel tot de Rekenkunde

Jamshīd al-Kāshī werd vermoedelijk omstreeks 1370 geboren in Iran. Zijn naam al-Kāshī geeft aan dat hij afkomstig is uit Kāshān, nu een stad van 400.000 inwoners op 300 km ten zuiden van Teheran. Hij groeide op in armoedige omstandigheden, maar verwierf zich een reputatie als wis- en sterrenkundige. In 1420 werd hij naar Samarkand uitgenodigd door de plaatselijke vorst Ulugh Beg, zelf ook een groot liefhebber van wiskunde en sterrenkunde. Hier bleef al-Kāshī tot zijn dood in 1429 en hier schreef hij de *Sleutel tot de Rekenkunde* (Arabisch: *miftāḥ al-ḥisāb*). Al-Kāshī's moedertaal was Perzisch, een Indo-Europese taal, verwant met het Nederlands, maar zoals de meeste van zijn tijdgenoten schreef hij zijn wiskundige en sterrenkundige werk in het Arabisch, dat toen de taal van de wetenschap was. Behalve de *Sleutel tot de Rekenkunde* publiceerde hij ook een berekening van π in 16 decimalen [11] en een methode voor de berekening van de sinus van 1 graad via de numerieke oplossing van een derdegraads vergelijking [14]. Uit Samarkand schreef hij ook twee Perzische brieven aan zijn vader in Kāshān, die hij met twee verschillende karavanen meegaf. Beide brieven zijn bewaard[1] en ze geven een goed inzicht in de zelfverzekerde persoon van al-Kāshī, zijn werk op het sterrenkundig observatorium te

Samarkand, en zijn soms problematische relaties met collega's en met de vorst Ulugh Beg.

De *Sleutel tot de Rekenkunde* is een boek van een paar honderd bladzijden, waarin al-Kāshī's grote rekentalent goed zichtbaar wordt. Het boek werd snel populair en er zijn meer dan dertig Arabische manuscripten bewaard. Een van de oudste daarvan is in de wereldberoemde collectie Oosterse handschriften van de Universiteitsbibliotheek te Leiden. Sinds 1880 is de *Sleutel tot de Rekenkunde* drie keer in het Arabisch uitgegeven, en het boek is ook verschenen in Russische vertaling [13]. Het werk is tot nu toe maar voor een klein gedeelte in een Westerse taal vertaald [10]. Al-Kāshī waagde zich op allerlei terreinen die zijn voorgangers nooit hadden betreden. Sommige van zijn resultaten zijn wel bekend in de Westerse literatuur, maar andere niet; een voorbeeld uit de laatste categorie zijn zijn berekeningen van oppervlakten en inhouden van de regelmatige en van enkele halfregelmatige veelvlakken.

De *Sleutel tot de Rekenkunde* bestaat uit vijf delen. Deel 1 gaat over berekeningen met natuurlijke getallen in wat al-Kāshī het 'Indiase' systeem noemt, dat wil zeggen de Hindoe-Arabische cijfers die wij tegenwoordig nog steeds gebruiken. Al-Kāshī gebruikte de vormen van de cijfers die in het Midden-Oosten gangbaar zijn. In deel 2, over breukrekenen, behandelt hij zaken als optellen en vereenvoudigen van breuken, en ook decimaalbreuken. Decimaalbreuken zijn in de islamitische cultuur diverse malen uitgevonden maar ze werden nooit erg populair. Deel 3 heet *Over de methode van rekenen van de sterrenkundigen*, en hierin behandelt al-Kāshī rekenen in het sexagesimale stelsel, dat werkt met graden, minuten, seconden, enzovoort. Deel 4 gaat over de bepaling van oppervlakten en inhouden. Tenslotte bespreekt al-Kāshī in deel 5 het gebruik van algebra en andere rekentrucs om onbekenden (meestal in meetkundige problemen) uit te rekenen.

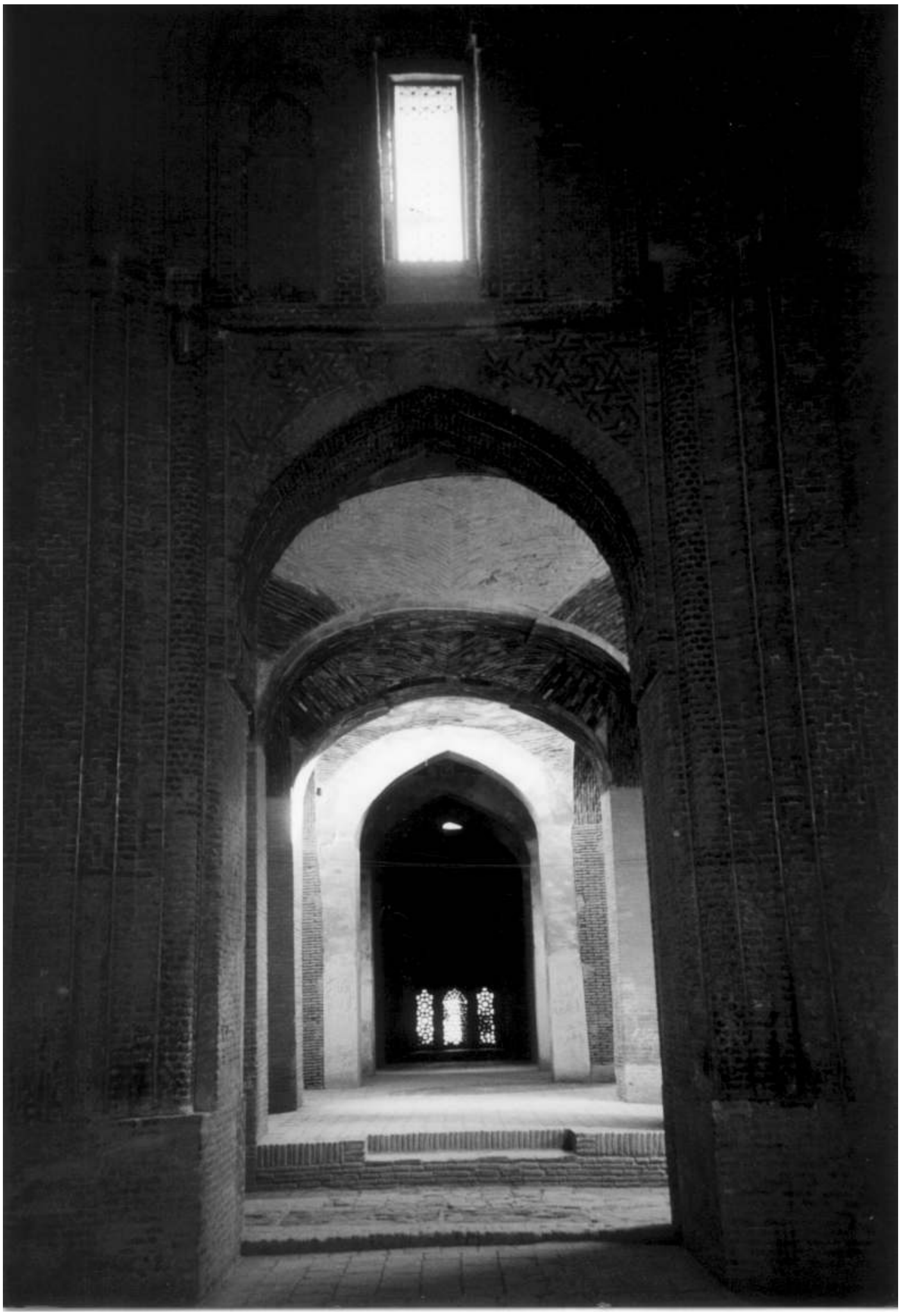
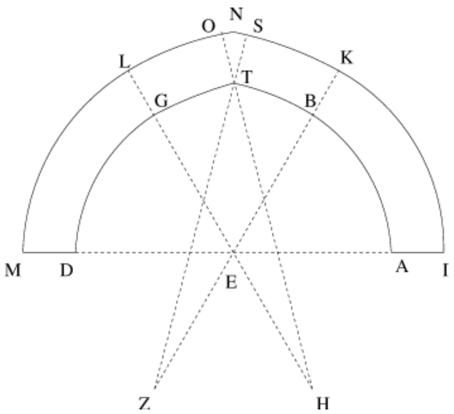


foto: Jan P. Hogendijk

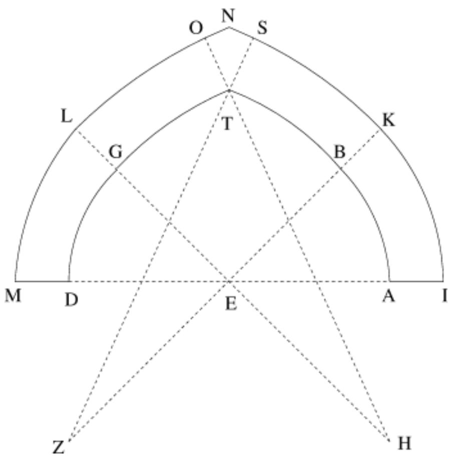
Figuur 3 Noordelijke koepel van de Vrijdagsmoskee te Isfahan

Hoofdstuk 9 van deel 4

Deel 4 van de *Sleutel tot de Rekenkunde* begint met hoofdstukken over de bepaling van de oppervlakten van (1) driehoeken, (2) vierhoeken, (3) veelhoeken, (4) de cirkel en cirkelsegmenten, (5) andere vlakke figuren, (6) bol, cilinder en kegel en segmenten daarvan, en over (7) de inhouden van al deze figuren, en (8) het bepalen van de samenstelling ervan door wegen, op basis van kennis van soortelijke gewichten. Het negende en laatste hoofdstuk van deel 4 van de *Sleutel tot de Rekenkunde* heet *het meten van bouwwerken en gebouwen*. Met meten wordt hier natuurlijk niet opmeten bedoeld, maar het bepalen van oppervlakte en inhoud. Het negende hoofdstuk is op zijn beurt onderverdeeld in drie kleinere hoofdstukken (1) over bogen, (2) over koepels, en (3) over *muqarnas*. De boog is in het tegenwoordige Iran en de landen daaromheen een vaak voorkomend element in de architectuur van moskeeën, gebouwen en bruggen. In oude moskeeën in Irak, Iran en de aangrenzende ex-sovjetrepublieken vinden we veel koepels, vaak van onbeschrijfelijke schoonheid. Muqarnas is het Arabische woord voor de stalactietengewelven aan de binnenkant van koepels, zoals die ook in het Alhambra gevonden worden. In figuur 1 zien we de koepel van de Lotfollah moskee te Isfahan in Iran, met daaronder de ingang en verscheidene bogen. In de grote boog zien we muqarnas. Bogen en muqarnas zijn ook te zien op figuur 2, genomen in de Vrijdagsmoskee te Isfahan. De Lotfollah moskee en het deel van de Vrijdagsmoskee op figuur 2 stammen uit de tijd van de Safawieden die Isfahan in de zeventiende eeuw regeerden, en ze



Figuur 4 De eerste boog van al-Kāshī



Figuur 5 De tweede boog van al-Kāshī

zijn dus recenter dan het werk van al-Kāshī. Figuur 3 is genomen in de Noordelijke koepel van de Vrijdagsmoskee te Isfahan, die al in de elfde-eeuw is gebouwd. De bogen zijn primitiever maar hebben wel een soortgelijke vorm.

Het negende hoofdstuk van de *Sleutel tot de Rekenkunde* is al jaren lang het object van studie van Dr. Yvonne Dold-Samplonius van de Universiteit van Heidelberg. Uniek aan haar onderzoek is dat de wetenschappelijke analyses en edities van de hoofdstukken vergezeld gaan van een video-presentatie voor een groot publiek.[2] Deze video's worden geproduceerd in samenwerking met het Interdisciplinary Center for Scientific Computing te Heidelberg.

Het derde hoofdstuk over muqarnas is op dit moment onderwerp van een promotieonderzoek van drs. Silvia Harmsen aan het genoemde instituut te Heidelberg. Het basisprobleem is om zoveel informatie over de structuur van muqarnas te vinden, dat uit een twee-dimensionale (horizontale) plattegrond van de muqarnas op eenduidige manier het drie-dimensionale oppervlak gegenereerd kan worden. Dit kan belangrijk zijn bij restauratie van muqarnas. Het derde hoofdstuk is de enig bekende middeleeuwse bron is waarin muqarnas in detail wordt beschreven. Er wordt momenteel gewerkt aan een proefversie van een video over muqarnas in het algemeen. Men kan de stand van zaken bijhouden op de website: zie [18].

De rest van deze bijdrage zal besteed worden aan de hoofdstukken 1 en 2 over bogen en koepels. Over deze hoofdstukken is een video uitgekomen, waarin al-Kāshī's beschrijvingen van bogen en koepels worden vergeleken met bestaande koepels van moskeeën en graftombes in Samarkand en Bukhara in Oezbekistan. Hierbij zijn ook de graven van de vorst Ulugh Beg en al-Kāshī's collega en concurrent Qāḍī-Zādeh al-Rūmī, die de wiskundeleraar van Ulugh Beg was toen al-Kāshī in Samarkand aankwam. Al-Kāshī's eigen graf in Samarkand is verloren gegaan, en in het tweede gedeelte van de video heeft Yvonne Dold een virtuele graftombe voor al-Kāshī ontworpen met gebruikmaking van zijn eigen analyses van koepels. (De video kan worden besteld: zie [6].) Het bestuur van de Iraanse stad Kāshān was zo onder de indruk van de video dat mevrouw Dold tot ereburgeres van de stad is uitgeroepen.

De tekst van hoofdstuk 1 en 2 over bogen en koepels is op dit moment nog niet in definitieve vorm gepubliceerd. Op mijn internetpagina, [19], staat een door mij getypte ruwe Arabische versie, alleen gebaseerd op het Leidse handschrift, met een Nederlandse vertaling, speciaal voor een Nederlands publiek van leraren, leerlingen en andere geïnteresseerden gemaakt. Tekst en vertaling hebben geen wetenschappelijke pretenties, en zoals uit de voetnoten blijkt zijn er diverse onopgeloste problemen. Door vergelijking met diverse andere Arabische handschriften zal mevrouw Dold hieruit de definitieve Arabische editie vaststellen en de gecorrigeerde Arabische tekst met Engelse vertaling publiceren.

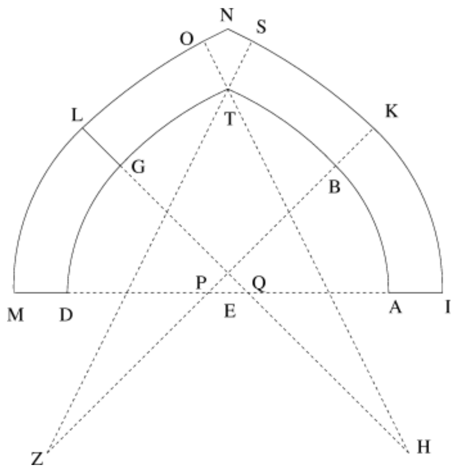
Vijf soorten bogen van al-Kāshī

Volgens al-Kāshī hadden eerdere wiskundigen in hun boeken de boog behandeld als een deel van een cilinder, maar zulke bogen had hij nooit in de praktijk gezien. Hij begint daarom met een beschrijving van vijf typen bogen die hij wel zelf gezien had. Deze beschrijvingen zullen hier in iets gemoderniseerde vorm worden gegeven, maar in figuren 4 en 5 zal dezelfde notatie worden gebruikt als in de figuren van al-Kāshī.

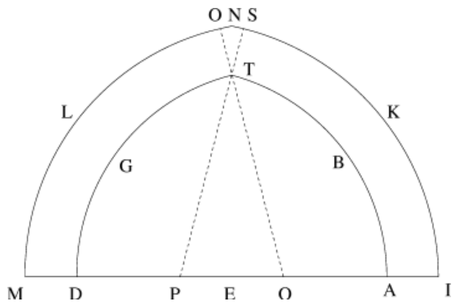
Voor types 1 en 2 beginnen we met een horizontaal lijnsegment AD met als lengte de breedte $2r$ van de opening van de boog. Dit segment wordt aan beide zijden verlengd tot I en M zodat AI en DM gelijk zijn aan de dikte d van de boog.

Vanuit het midden E van segment AD beschrijven we vier cirkelbogen DG, ML, BA, KI, groot 60^o (type 1) of 45^o (type 2), en met stralen r en $r+d$. Deze bogen worden begrensd door stralen EGL en EBK. We verlengen nu GE en BE tot H en Z zodat $EH = EZ = r$ (type 1) en $EH = EZ = r\sqrt{2}$ (type 2). Dan beschrijven we met middelpunten H en Z twee cirkelbogen met stralen HG en ZB, die eindigen in punt T recht boven E, waar ze een stompe hoek met elkaar maken. Dan beschrijven we nog twee cirkelbogen met middelpunten H en Z en stralen HL en ZK en we stoppen in punten O en S die op het verlengde van de stralen HT en ZT liggen. Deze nieuwe cirkelbogen hebben gemeenschappelijke raaklijnen met de eerder geconstrueerde bogen in punten G, L, B, K. Tenslotte construeren we de 'amandel' $OTSN$ door twee loodlijnen ON en SN op OT en ST op te richten. De boog is nu klaar. Bogen van type 2 komen volgens al-Kāshī meer voor dan alle andere typen.

De derde boog lijkt op de tweede, met dien verstande dat de middelpunten van de bogen van 45 graden DG, ML, BA, KI niet meer in E liggen maar in punten P, Q die op afstand $r/8$ van E liggen. De stralen van DG en BA zijn



Figuur 6 De derde boog van al-Kāshī



Figuur 7 De vierde boog van al-Kāshī

	I				II				III				IV				V			
	g	m	s	t	g	m	s	t	g	m	s	t	g	m	s	t	g	m	s	t
eerste geval	1	37	26	6	1	35	37	28	0	34	7	38	1	1	58	4	0	24	28	42
tweede geval	1	39	2	19	1	35	55	42	0	35	55	16	1	5	55	12	0	25	9	13
derde geval	1	42	44	3	1	36	21	47	0	38	17	30	1	6	55	38	0	27	2	34
vierde geval	1	45	26	57	1	34	34	44	0	38	43	47	1	5	55	12	0	28	41	41
													als bij de tweede							

Tabel 1 Al-Kāshī's tabel in sexagesimalen. Afkortingen: g = graden (delen), m = minuten, s = seconden, t = tertsen.

V				IV				III				II				I				
e	i	ii	iii	e	i	ii	iii	e	i	ii	iii	e	i	ii	iii	e	i	ii	iii	
	4	0	8	1	0	3	3		5	6	9	1	5	9	4	1	6	2	4	eerste geval
	4	1	9	1	0	9	9		5	9	8	1	5	9	9	1	6	5	1	tweede geval
	4	5	1	1	1	1	5		6	3	8	1	6	0	6	1	7	1	2	derde geval
	4	7	8	1	0	9	9		6	4	5	1	5	7	6	1	7	5	7	vierde geval

Tabel 2 Al-Kāshī's tabel in decimalen Afkortingen: e = eenheden, i = tienden, ii = tweede tienden, iii = derde tienden.

Arabische opschriften boven de tabellen I = als we de spanwijdte hiermee vermenigvuldigen, krijgen we de holle kant van de boog; II = als we de dikte van de boog hiermee vermenigvuldigen, en het optellen bij de holle kant van de boog, en de som met de dikte van de boog vermenigvuldigen, krijgen we de oppervlakte van de gevel ervan; III = we vermenigvuldigen de spanwijdte hiermee, dan krijgen we de hoogte van de laagste knik; IV = we vermenigvuldigen de dikte van de boog hiermee en we tellen het resultaat op bij de hoogte van de laagste knik, dan krijgen we de hoogte van de hoogste knik; V = we vermenigvuldigen het kwadraat van de spanwijdte van de boog hiermee, dan krijgen we de oppervlakte van het open deel, dat de bouwers 'het passeer'[4] noemen.

Figuur 8 Afbeelding van de tabel in folio 77a van het handschrift Or. 185 in de Universiteitsbibliotheek te Leiden. Gepubliceerd met vriendelijke toestemming van de curator, prof.dr. J.J. Witkam.

nu $r + r/8$; in figuur 6 is Q middelpunt van bogen DG en ML, en P van BA en KI. Om de bogen mooi op elkaar aan te laten sluiten liggen de middelpunten H en Z op de stralen GQ en BP, en wel zodanig dat $QH = PZ = r\sqrt{2}$.

In het vierde type verdelen de punten P en Q segment AD in drie gelijke delen. Met middelpunten Q en P beschrijven we bogen DGT, ABT die eindigen in T verticaal boven E en daar een stompe hoek maken. We beschrijven dan, ook met middelpunten Q en P, de bogen MLO en IKS die eindigen in punten O en S op het verlengde van de stralen QT, PT. Tenslotten construeren we de 'amandel' $OTSN$ als boven.

Het vijfde type wordt door al-Kāshī niet uitgebreid besproken, maar komt op bestaande bouwwerken wel algemeen voor. Voor de definitie verwijzen we naar de vertaling, zie [19]. Yvonne Dold heeft een rotatielichaam van een boog van het vijfde type gebruikt voor de virtuele graftombe van al-Kāshī.

De bogen kunnen op verschillende manieren worden toegepast. Meestal is het segment $MDAI$ een aantal meters boven de grond en rust de boog op verticale muren onder AI en DM. Vaak is het gedeelte boven $IKNLM$ opgevuld met een muur.

Al-Kāshī's berekeningen aan de bogen

Al-Kāshī wil nu zijn lezer in staat stellen voor de eerste vier typen bogen van gegeven spanwijdte $2r$ en gegeven dikte d de volgende vijf grootheden, die wij met Romeinse cijfers zullen aangeven, op gemakkelijke manier uit te rekenen:

I = De lengte van de holle kant $DGTBA$
II = De oppervlakte van de gevel $DGTBAIKSNOLM$
III = De hoogte ET van de laagste knik
IV = De hoogte EN van de top
V = De oppervlakte van de opening $DGTBAE$.

Al-Kāshī gebruikt geen algebraïsche notatie, maar hij is zich van de meetkundige equivalenten van de volgende formules bewust (waarin $2r$ staat voor de spanwijdte AD en d voor de dikte DM):

1. I = $c_1 \cdot 2r$
2. II = $(c_1 \cdot 2r + c_2 \cdot d) \cdot d$
3. III = $c_3 \cdot 2r$
4. IV = $c_3 \cdot 2r + c_4 \cdot d$
5. V = $c_5 \cdot (2r)^2$

De getallen c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 zijn constanten die voor de vier typen verschillende waarden aannemen.

Het probleem komt nu neer op de berekening van de constanten c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Al-Kāshī heeft deze constanten modern gezegd in drie sexagesimalen achter de komma uitgerekend. Hij gebruikt geen scheidingsteken maar geeft de sexagesimalen aan met graden, minuten, seconden en tertsen. Daarna heeft hij de constanten omgerekend naar drie decimalen achter de komma (zoals gezegd was hij een van degenen, die de decimaalbreuken uitgevonden heeft). Ook hier heeft hij geen scheidingsteken, maar noemt de decimalen eenheden, eerste tienden, tweede tienden, derde tienden. Daarna geeft hij de resultaten in sexagesimalen en decimalen weer in een tabel.

Figuur 8 is een afbeelding van deze tabel in het Leidse handschrift van de *Sleutel tot de rekenkunde*, en tabellen 1 en 2 geven de bovenste en onderste helft van de tabel in moderne notatie weer. In de bovenste helft staan de sexagesimale waarden uitgedrukt in alfabetische notatie, die alleen gelezen kan worden door mensen die het Arabische alfabet kennen.[3] Omdat het Arabisch van rechts naar links schrijft is tabel 1 ten opzichte van het handschrift gespiegeld. Bij tabel 2 is dit bewust niet gedaan, omdat de lezer de decimalen in het handschrift kan herkennen zonder verdere kennis van het Arabisch. De cijfers hebben ongeveer de vormen die tegenwoordig in het Midden Oosten gebruikelijk zijn. Nadat hij de tabel heeft gegeven, legt al-Kāshī de berekening van de constanten stap voor stap uit. In de loop van deze berekening wordt ook voor een groot deel duidelijk waarom de

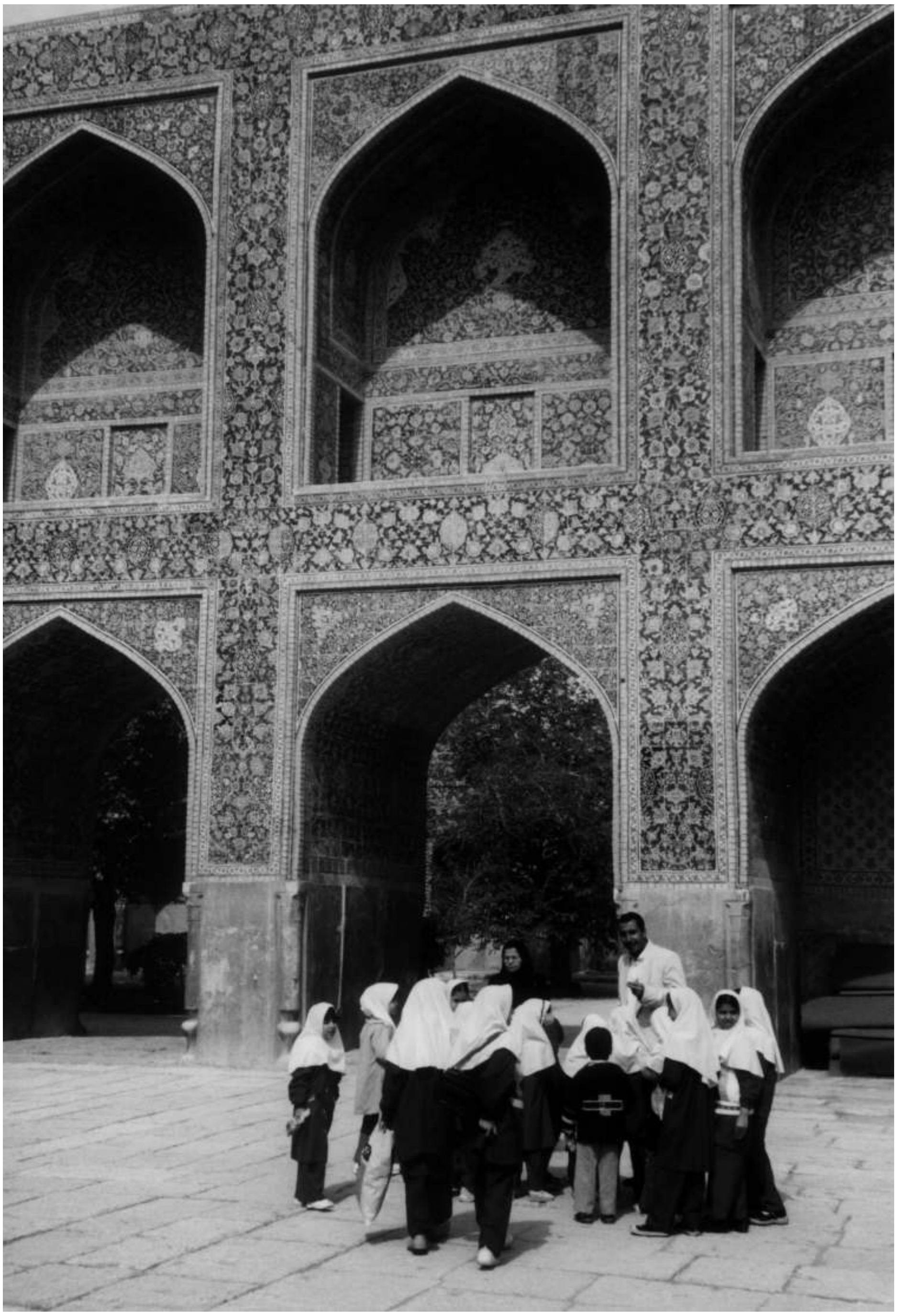


foto: Jan P. Hogendijk

Figuur 9 Binnenhof, Imam Moskee, Isfahan

formules I tot en met V kloppen. Al-Kāshī heeft hierbij een nauwkeurige waarde voor π en een sinustabel nodig. Voor details verwijzen we naar de vertaling, zie [19].

Al-Kāshī's analyse van koepels

Volgens al-Kāshī kunnen koepels een bolvorm of kegelvorm hebben, maar ze kunnen ook ontstaan door rotatie van een boog om de verticale as ET door het midden van het segment AD in de figuren 4 tot en met 7. Het bepalen van oppervlakte en inhoud van deze koepels levert een interessant wiskundig probleem op. In de Griekse wiskunde in de oudheid waren de oppervlakten en inhouden van kegel, cilinder, bol, en bolsegmenten bepaald. Het werk van Archimedes waarin deze resultaten werden bewezen was in het Arabisch vertaald en in de islamitische traditie algemeen bekend. Als we de boog in figuur 4 roteren, ontstaan uit de bogen GD en LM bolsegmenten, en uit de rechte lijnen ON en SN kegeloppervlakken. De oppervlakten van deze gedeelten zouden dus in principe uitgerekend kunnen worden. Met bogen LO en GT ligt de situatie minder eenvoudig, want zij produceren een rotatielichaam van een cirkelboog om een as die niet de diameter van de cirkel is. Daarom neemt al-Kāshī zijn toevlucht tot een numerieke benadering.

Allereerst verdeelt hij de oppervlakte van de koepel met behulp van horizontale sneden in plakjes. Het hoogste plakje kan benaderd worden met een kegel en de overige plakjes als afgeknotte kegels, en omdat de oppervlakte en inhoud daarvan bekend zijn, kan de zijoppervlakte en inhoud van elk plakje benaderd worden. We krijgen een benadering van de oppervlakte en inhoud van de koepel door al die oppervlakten c.q. inhouden op te tellen. Al-Kāshī zegt ook dat hij gevonden heeft dat het resultaat nauwkeurig genoeg is als we de koepel in 7 of 8 plakjes verdelen. Modern gezien benadert al-Kāshī een een integraal door iets wat op een Riemannsom lijkt.

Al-Kāshī heeft deze benadering uitgevoerd voor de koepel van het vierde type (figuur 7, 10) en geeft als oppervlakte van het gekromde binnenste deel (rotatielichaam van DTA) een bedrag van $(1+46/60+32/3600) = 1.775$ maal het kwadraat van de spanwijdte. De inhoud van de lege ruimte in de koepel geeft hij als $18/60 + 23/3600 = 0.306$ maal de derde macht van de spanwijdte.

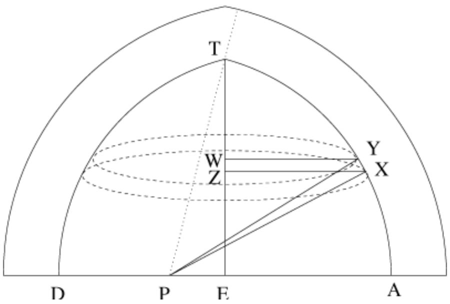
Met behulp van de moderne integraalrekening kunnen we gemakkelijk uitrekenen hoe goed deze benaderingen zijn. In figuur 10 zien we dezelfde boog als figuur 7. Door de rotatie hiervan om ET ontstaat de koepel waarvan de oppervlakte en inhoud gevraagd worden. Kies twee punten X en Y die vlak bij elkaar op de boog liggen, en noem Z en W de loodrechte projecties van X en Y op TE. We noteren $\angle XPA = \theta$, $\angle XPY = d\theta$, en $AD = 2r$. Dan $EP = \frac{1}{3}r, AP = \frac{4}{3}r = PX$, en $XZ = \frac{4}{3}r\cos\theta - \frac{1}{3}r$. Verder geldt $|XY| \approx \frac{4}{3}r\,d\theta$.

We bekijken een plakje met onderkant door X en bovenkant door Y, zie de ellipsen in figuur 10. Voor de oppervlakte van de afgeknotte kegel met zelfde bovenkant en onderkant vinden we de benadering

$$2\pi\cdot|XZ|\cdot|XY| = \frac{8}{3}\pi r(\frac{4}{3}r\cos\theta - \frac{1}{3}r).$$

Om de oppervlakte te vinden moeten we deze functie integreren over het interval van 0 tot θ_0 waarbij $\theta_0 = \angle APT$. Omdat $\cos\theta_0 = |EP|/|AP| = 1/4$ geldt $\theta_0 = \arccos\frac{1}{4}$. Door de integraal uit te werken vinden we als oppervlakte $\frac{8}{9}\pi r^2(4\sin\theta_0 - \theta_0) = \frac{2}{9}\pi(\sqrt{15} - \arccos\frac{1}{4})\cdot(2r)^2$. We gebruiken hierbij $\sin\theta_0 = \sqrt{1-\cos^2\theta_0}$. Merk op dat de hoek θ_0 in de uitkomst van de integraal in radialen moet worden uitgedrukt.

Omdat $\frac{2}{9}\pi(\sqrt{15} - \arccos\frac{1}{4}) = 1,7836\ldots$,



Figuur 10 Oppervlaktebepaling van een koepel van het vierde type

kunnen we concluderen dat al-Kāshī's getal $1,775$ een goede benadering is (vergelijk [2]).

Voor het vinden van de inhoud van de koepel willen we, in de woorden van Descartes, de lezer niet beroven van "het plezier om dit zelf te leren beheersen, en het voordeel om de eigen geest te oefenen door dit uit te werken."

Voor het oppervlakte van het buitenste deel lijkt al-Kāshī dezelfde formule te geven, maar deze is minder correct en de tekst in het Leidse handschrift is onduidelijk.

Al-Kāshī's bepalingen van de oppervlakten van een koepels zouden een praktische toepassing gehad kunnen hebben. Koepels werden vaak betegeld, en het is handig om te weten hoeveel tegels er ongeveer nodig zijn, en men zou de tegelzetter een salaris kunnen uitbetalen van een constante maal de betegelde oppervlakte. De koepels van belangrijke islamitische heiligdommen worden soms verguld (voorbeelden in Najaf, Qom, en Meshed), en in principe zou met al-Kāshī's coëfficienten kunnen worden uitgerekend hoeveel goud daarvoor nodig is. Of al-Kāshī's wiskundige resultaten over koepels ooit zijn toegepast, is niet duidelijk. Om dit na te gaan zou men nog veel zoekwerk in bibliotheken in Oosterse landen moeten doen. In elk geval heeft een vraag die uit de islamitische architectuur afkomstig is, al-Kāshī geïnspireerd tot een stukje grensverleggende wiskunde.

Noten

1 Voor de eerste brief zie [1] (Engelse vertaling), voor de tweede brief [15] (Perzisch origineel met Turkse en Engelse vertaling) en [9] (Engelse vertaling).

2 Tot nu toe is verschenen: van hoofdstuk 1 analyse in [7]; voor hoofdstuk 2 analyse in [2], [4], [7]; voor hoofdstuk 3 analyse in [3] met hierin ook een letterlijke Engelse vertaling van het hoofdstukje en een Arabische tekst; verdere analyse in [5] en [7].

3 Voor degenen die Arabisch kennen, volgt hier de waarde van de letters, voorzover nodig: alif = 1, bā' = 2, jīm = 3, dāl = 4, hā' = 5, wāw = 6, zā' = 7, ḥā' = 8, ṭā' = 9, yā' = 10, kāf = 20, lām = 30, mīm = 40, nūn = 50. De nul wordt weergegeven door hetzelfde teken dat al in de Griekse oudheid gebruikt werd, namelijk een o (afkorting van ouden = niets), verbonden met een streepje erboven. Een getal als 23 werd weergegeven met het symbool voor 20 gevolgd door het symbool voor 3. Tenslotte staat een getal zoals 1 graad 23 minuten 56 seconden 19 tertsen voor $1 + \frac{23}{60} + \frac{56}{3600} + \frac{19}{216000}$.

4 Hier staat in het handschrift een mij onbekende term, *bāsīr* of *pāsīr*, waarmee 'opening' bedoeld moet zijn. Ik neem aan dat het een Perzisch woord betreft en heb het min of meer letterlijk in het Nederlands weergegeven. Perzisch is een Indo-Europese taal en daarom lijken een aantal woorden in het Perzisch en het Nederlands op elkaar. Moderne praktijkvoorbeelden die ik ben tegengekomen: be-nām-e Godā (staat boven elke officiële brief) = In de naam van God, dogtar = dochter, behtar = beter, moertsje = miertje, geili goeb = heel goed. Zo kan men hele zinnen maken: Goda geili goeb est = God is heel goed.

Referenties

1 M. Bagheri, 1997. 'A Newly Found Letter of al-Kāshī on Scientific Life in Samarkand', *Historia Mathematica* **24**, p. 241–256.

2 Yvonne Dold-Samplonius, 1992. 'The XV-th Century Timurid Mathematician Ghiyāth al-Dīn Jamshīd al-Kāshī and his Computation of the Qubba', in S.S. Demidov et. al., eds., *Amphora: Festschrift for Hans Wussing on the Occasion of his 65th Birthday*, Basel: Birkhäuser, p. 171–181.

3 Yvonne Dold-Samplonius, 1992/3. Practical Arabic Mathematics: Measuring the Muqarnas by al-Kāshī, *Centaurus* **35**, p. 193–242.

4 Yvonne Dold-Samplonius, 1993. 'The Volume of Domes in Arabic Mathematics', in: M. Folkerts, J.P. Hogendijk, eds., *Vestigia Mathematica: Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam: Rodopi, p. 93–106.

5 Yvonne Dold-Samplonius, 1996. 'How al-Kāshī Measures the Muqarnas: A Second Look', in M. Folkerts, ed., *Mathematische Probleme im Mittelalter — Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden: Harrassowitz, p. 57–90.

6 Yvonne Dold-Samplonius, 1997. Video: Qubba for Al-Kashi, 18 minutes, Providence: American Mathematical Society, te bestellen via http://www.ams.org/bookstore/videos

7 Yvonne Dold-Samplonius, 2003. 'Calculating Surface-areas and Volumes in Islamic Architecture', in Jan P. Hogendijk, Abdelhamid I. Sabra, eds., *The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives*, Cambridge: MIT Press, p. 235–265.

8 Jan P. Hogendijk, 1996. 'Een workshop over Iraanse mozaïeken', *Nieuwe Wiskrant* **16** no. 2, p. 38–42.

9 E.S. Kennedy, 1960. 'A Letter of Jamshīd al-Kāshī to his father: Scientific Research at a Fifteenth Century Court', *Orientalia* **29**, p. 191–213, herdrukt in E.S. Kennedy, *Studies in the Islamic Exact Sciences*, Beirut 1983, p. 722–744.

10 Paul Luckey, 1951. *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas^{c}ūd al-Kāšī,* Wiesbaden: Kommissionsverlag Franz Steiner, herdrukt in [16].

11 Paul Luckey, 1953. *Die Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-risāla al-muḥīṭīya) von Ǧamšīd b. Mas^{c}ūd al-Kāšī, übersetzt und erläutert von P. Luckey, herausgegeben von A. Siggel*, Berlin: Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, Jahrgang 1950 no. 6, herdrukt in [16, p. 227–329].

12 Gülru Necipoğlu, 1995. *The Topkapı Scroll, geometry and ornament in Islamic architecture: Topkapı Palace Museum Library MS. H. 1956, With an Essay on the Geometry of the Muqarnas by Moḥammad al-Asad,* Santa Monica, Ca. 90401–1455: Getty Center for the History of Art and the Humanities, ISBN 0-89236-335-5.

13 Boris A. Rosenfeld, 1956. *Dzhemshid Giyased-din al-Kashi, Klyuch Arifmetiki, Traktat ob Okruzhnosti*, Per. B.A. Rosenfeld, comm. A.P. Yuschkevitch, B.A. Rosenfeld, Moskva: Gosudarstvennoe Izdatelstvo.

14 Boris A. Rosenfeld, Jan P. Hogendijk, 2003. 'A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg', *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* **15**, p. 25–65.

15 A. Sayılı, 1960. *Uluğ Bey ve Semerkanddeki ilim faaliyeti hakkında Giyasüddin-i Kâşî'nin mektubu* (Ghiyâth al-Dîn al-Kâshî's letter on Ulugh Bey and the scientific acticity in Samarqand), Ankara 1960, 115 pp, herdrukt in [16, p. 361–473].

16 F. Sezgin, 1998. *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 56, Frankfurt: Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften.

17 Vacantiecursus 2004 — *Structuur in Schoonheid*, Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2004. CWI-syllabus 53.

18 www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/ngg/Muqarnas/

19 www.math.uu.nl/people/hogend/kashi.html