Jaap Korevaar
KdV Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
korevaar@science.uva.nl

Overzichtsartikel

Een eenvoudig bewijs van

Onlangs is in de serie Grundlehren der mathematischen Wissenschaften het boek 'Tauberian Theory, a Century of Developments' van de hand van Jaap Korevaar verschenen. Het plan voor het boek lag er al enige tientallen jaren en sinds 1999 heeft hij er onafgebroken aan gewerkt. Belangrijke Tauberstellingen doen uitspraken over convergentie van machtreeksen op grond van hun gedrag aan de rand van het convergentiegebied. De theorie kent vele mooie toepassingen, onder andere in de analytische getaltheorie. Jaap Korevaar, vooraanstaand specialist op Tauber-gebied, is emeritus hoogleraar analyse aan de Universiteit van Amsterdam. Hij laat zien dat met de huidige kennis van de Taubertheorie een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling is te geven.

Het meest directe bewijs van de priemgetalstelling verkrijgt men uit een eenvoudige vorm van de Wiener-Ikeharastelling. Deze vorm wordt afgeleid door aanpassing van Newmans methode van contour-integratie.

Inleiding

Zij $\pi(t)$ het aantal priemgetallen niet groter dan t. De beroemde priemgetalstelling (PGS) zegt dat

$$\pi(t) \sim \frac{t}{\log t} \quad \text{als} \quad t \to \infty. \tag{1}$$

In woorden: $\pi(t)$ gedraagt zich asymptotisch als $t/\log t$, dat wil zeggen, de verhouding van de eerste tot de tweede grootheid nadert tot 1 als $t \to \infty$. Hier betekent log de natuurlijke logaritme. Een aardig boekje over de PGS is [16]; zie ook [1] en [13] voor geschiedenis en ontwikkelingen.

Op grond van tellingen veronderstelden Euler, Gauss en Legendre reeds dat $t/\log t$ een redelijke benadering is voor $\pi(t)$. Later vond Chebyshev constanten $c < 1 < C$ (vrij dicht bij 1) zodanig, dat voor $t \geq t_0$,

$$c\,\frac{t}{\log t} \leq \pi(t) \leq C\,\frac{t}{\log t}. \tag{2}$$

De eerste bewijzen van de PGS verschenen in 1896; zij werden (min of meer onafhankelijk) gevonden door Hadamard [5] en de la Vallée Poussin [17]. Beide auteurs maakten gebruik van Hadamard's theorie van gehele (dat wil zeggen overal analytische) functies, die speciaal met het oog op de PGS ontwikkeld was. De bewijzen waren heel ingewikkeld, maar enkele jaren later kon de la Vallée Poussin ook een schatting voor $\pi(t)$ afleiden met een goede restterm. Sindsdien hebben vele wiskundigen eenvoudigere bewijzen van (1) gezocht en gevonden. Hier moet men allereerst Landau noemen; zie [11]. Een belangrijke doorbraak kwam met de Taubertheorie van Wiener (1928–1932); zie [18], [19]. De zogenaamde Wiener-Ikehara stelling levert de meest directe weg naar de PGS; vergelijk het artikel van zijn leerling Ikehara [7] en de artikelen [12], [2]. Uit Wieners werk volgt dat de PGS equivalent is met het feit, dat de zogenaamde *Riemann zetafunctie* $\zeta(z)$ geen nulpunten heeft op de lijn $\{\operatorname{Re} z = 1\}$; zie [9] of [10] (sectie III.3).

Voor complexe $z = x + iy$ met reëel deel x groter dan 1 wordt

de priemgetalstelling

de zetafunctie gegeven door de som van de Dirichletreeks

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \tag{3}$$

Deze formule maakt $\zeta(z)$ een analytische functie op het halfvlak $\{\operatorname{Re} z > 1\}$. Voor andere waarden van z definieert men $\zeta(z)$ als de analytische voortzetting van de somfunctie in (3). Het blijkt dat $\zeta(z)$ analytisch is in het gehele complexe vlak, behalve in het punt $z = 1$. Daar heeft de zetafunctie een pool van de eerste orde, met residu 1. Met andere woorden, het (voor $z = 1$ continu gemaakte) verschil

$$g(z) = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} \tag{4}$$

is een gehele analytische functie.

De meeste bewijzen van de priemgetalstelling gebruiken het nulpuntvrij zijn van de zetafunctie op de lijn $\{\operatorname{Re} z = 1\}$. De voornaamste uitzonderingen zijn de zogenaamde elementaire bewijzen van Selberg [15] en Erdős [4] uit 1949. 'Elementair' betekent hier: 'vrij van complexe analyse'. Deze bewijzen zijn ingenieus maar zeer ingewikkeld. De Selberg–Erdős methode heeft tenslotte geleid tot bijna even goede restschattingen voor $\pi(t)$ als de complexe methoden; zie [3]. Het boek [10] behandelt diverse bewijzen van de PGS met behulp van Tauberstellingen.

In 1980 publiceerde Newman [14] een betrekkelijk eenvoudig bewijs voor de PGS met behulp van complexe analyse. Twee variaties op zijn bewijs, die overigens sterk op elkaar lijken, staan in [8] en [20]. In dit artikel wordt Newmans methode aangepast om het volgende speciale geval te bewijzen van de Wiener–Ikehara stelling, dat voldoende is voor de PGS.

Stelling 1. *Stel dat de Dirichletreeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}, \quad \textit{met coëfficiënten } a_n \geq 0, \tag{5}$$

convergeert in het halfvlak $\{\operatorname{Re} z > 1\}$. De somfunctie $f(z)$ zal analytisch zijn in dat open halfvlak; stel nu dat er een constante A is zodanig, dat het verschil

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{z-1} \tag{6}$$

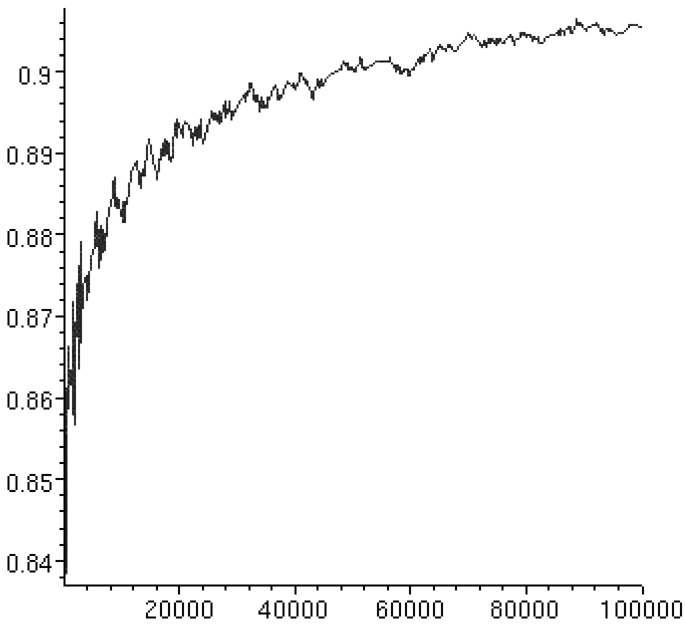
een analytische (of continue) voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak gegeven door $\{\operatorname{Re} z \geq 1\}$. Veronderstel tenslotte dat de partiële sommen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ begrensd worden door een constante maal n. Dan geldt

$$s_n \sim An \quad \textit{als} \quad n \to \infty, \tag{7}$$

dat wil zeggen, $s_n/n \to A$.

Als illustratie kan het geval van de zetafunctie dienen. Hier is $a_n \equiv 1$ en heeft men (6) met $A = 1$. Het is duidelijk dat hier de conclusie $s_n \sim n$ geldig is!

De hypothese $s_n \leq Cn$ in stelling 1 kan gemist worden en zij



Figuur 1 Grafiek van $n/\log n$ gedeeld door het aantal priemgetallen niet groter dan n

komt niet voor in de oorspronkelijke Wiener–Ikehara stelling. Met een wat ingewikkelder redenering dan die in dit artikel kan de extra hypothese uit de overige onderstellingen afgeleid worden.

Afleiding van de priemgetalstelling

We beginnen met het Eulerproduct voor $\zeta(z)$: voor $\mathrm{Re}\, z > 1$ geldt

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ priem}} \left(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1-p^{-z}}. \tag{8}$$

De productformule volgt uit de unieke representatie van een natuurlijk getal $n \geq 2$ als product van machten van priemgetallen:

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}, \quad \text{waar } p_1 < \cdots < p_r, \; m_j \geq 1.$$

In het bijzonder volgt uit (8), dat $\zeta(z) \neq 0$ voor $\mathrm{Re}\, z > 1$.

Logaritmische differentiatie van het (omgekeerde) Euler product geeft

$$f_1(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \text{ priem}} \frac{p^{-z}\log p}{1-p^{-z}} = \sum_{p \text{ priem},\, m \geq 1} \frac{\log p}{p^{mz}}. \tag{9}$$

Door herschikking van de termen krijgt men de Dirichletreeks

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z}, \tag{10}$$

waarin de coëfficiënten gegeven worden door de von Mangoldt functie,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n = 1, \\ \log p & \text{als } n = p^m \text{ met } p \text{ priem en } m \geq 1, \\ 0 & \text{als } n \text{ tenminste twee verschillende} \\ & \text{priemfactoren heeft.} \end{cases} \tag{11}$$

In dit geval geven de partiële sommen van de coëfficiënten de *Chebyshev functie* ψ:

$$s_n = \psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k) = \sum_{p^m \leq n} \log p. \tag{12}$$

Uit de tweede Chebyshev ongelijkheid (2) volgt onmiddellijk, dat

$$\psi(n) = \sum_{p \leq n} \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \log p \leq \pi(n) \log n \leq Cn; \tag{13}$$

zie lemma 3. Chebyshev wist ook al, dat de (toen nog onbewezen) priemgetalstelling equivalent is met de asymptotische relatie

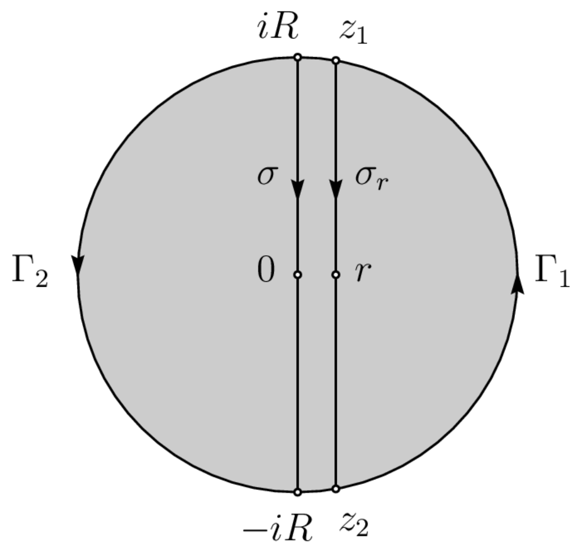
$$\psi(n) \sim n; \tag{14}$$

zie [11]. We zullen deze equivalentie in lemma 4 verifiëren.

Voor de toepassing van stelling 1 moeten we weten, hoe $f_1(z)$ zich gedraagt wanneer z naar de rand van het halfvlak $\{\mathrm{Re}\, z > 1\}$ toeloopt. We gebruiken nu het *essentiële feit* dat $\zeta(z) \neq 0$ op de lijn $\{\mathrm{Re}\, z = 1\}$; zie lemma 2. Hieruit volgt dat $f_1(z) = -\zeta'(z)/\zeta(z)$ analytisch is in alle punten van die lijn, behalve natuurlijk in het punt $z = 1$. Tenslotte volgt uit het feit dat $\zeta(z)$ zich rond het punt $z = 1$ gedraagt als $1/(z-1)$, dat $f_1(z)$ zich daar precies zo gedraagt. Samenvattend,

$$g_1(z) = f_1(z) - \frac{1}{z-1} \tag{15}$$

is *analytisch in alle punten van het gesloten halfvlak* $\{\mathrm{Re}\, z \geq 1\}$.



Figuur 2 De integratiewegen behorende bij het bewijs van stelling 2

De getallen $a_n = \Lambda(n)$ en de bijbehorende functies $f = f_1$ en $g = g_1$ voldoen aan de voorwaarden van stelling 1 met $A = 1$; de partiële sommen $s_n = \psi(n)$ zijn begrensd door Cn. Conclusie:

$$\psi(n) \sim n \quad \text{als} \quad n \to \infty.$$

Hiermee is aangetoond dat de PGS volgt uit stelling 1.

Herformulering van stelling 1

Voor het bewijs voeren we een reductie uit tot een stelling over Laplace-getransformeerden van begrensde functies. Neem aan dat de voorwaarden van stelling 1 vervuld zijn en definieer

$$s(v) = \sum_{k \le v} a_k,$$

zodat $s(v)$ niet afnemend is, $s(v) = s_n$ voor $n \le v < n+1$ en $s(v) = 0$ voor $v < 1$; het quotiënt $s(v)/v$ zal begrensd zijn. Met partiële sommatie volgt nu uit (5) dat voor $\operatorname{Re} z > 1$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left\{ \frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n z \int_n^{n+1} v^{-z-1} dv = z \int_1^{\infty} s(v) v^{-z-1} dv. \end{aligned} \tag{16}$$

In verband met (6) kan men dan schrijven

$$\begin{aligned} g(z) - A &= f(z) - \frac{A}{z-1} - A = f(z) - \frac{Az}{z-1} \\ &= z \int_1^{\infty} \left\{ \frac{s(v)}{v} - A \right\} v^{-z} dv. \end{aligned} \tag{17}$$

Voor $v \ge 1$ substitueren we tenslotte

$$v = e^t, \quad \frac{s(v)}{v} - A = e^{-t} s(e^t) - A = \rho(t); \tag{18}$$

we nemen $\rho(t) = 0$ voor $t < 0$. Op grond van de gegevens is $\rho(t)$ een begrensde functie, die voor $t \to \infty$ niet snel kan afnemen. Preciezer gezegd, voor $t > u$ geldt

$$\rho(t) - \rho(u) \ge -\varepsilon(t, u), \quad \text{waar} \;\; \varepsilon(t, u) \to 0 \tag{19}$$

als $u \to \infty$ en $0 < t - u \to 0$. Inderdaad, in ons geval is het verschil $\rho(t) - \rho(u)$ voor $t > u \ge 0$ gelijk aan

$$e^{-t} s(e^t) - e^{-u} s(e^u) \ge (e^{-t} - e^{-u}) s(e^u) \ge -C\{1 - e^{-(t-u)}\}.$$

Elke functie ρ, die aan (19) voldoet, wordt een *langzaam afnemende functie* genoemd, ofschoon zo'n functie best toenemend zou kunnen zijn!

We beschouwen nu de Laplace-getransformeerde van ρ:

$$\begin{aligned} L\rho(z) &= \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-zt} dt = \int_1^{\infty} \left\{ \frac{s(v)}{v} - A \right\} v^{-z-1} dv \\ &= \frac{g(z+1) - A}{z+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Alfred Tauber werd op 5 november 1866 geboren in Bratislava (Slowakije) en stierf op 26 juli 1942 in het concentratiekamp van Theresienstadt. Hij studeerde aan de universiteit van Wenen, waar hij ook zijn Habilitationsschrift verdedigde. Hij was hoogleraar aan deze universiteit van 1908 tot 1933 en werkte gedurende deze tijd ook als actuaris. Zijn wetenschappelijk werk verrichtte hij grotendeels op het terrein van de analyse, maar ook was hij geïnteresseerd in actuariële theorie, statistiek en kansberekening.

Uit de hypothesen van stelling 1 volgt dat $L\rho(z)$ analytisch is voor $\operatorname{Re} z > 0$, en een analytische of continue voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak $\{\operatorname{Re} z \ge 0\}$. Te bewijzen is, dat $\rho(t) \to 0$ als $t \to \infty$. Stelling 1 volgt dus uit de (algemenere)

Stelling 2. *Zij $\rho(t) = 0$ voor $t < 0$ en $|\rho(t)| \le M < \infty$ voor $t \ge 0$. De Laplace-getransformeerde*

$$G(z) = L\rho(z) = \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-zt} dt, \quad z = x + iy, \tag{21}$$

definieert dan een analytische functie voor $x > 0$. Stel dat $G(x + iy)$ voor $-R \le y \le R$ uniform (of in L^1) convergeert naar een limietfunctie $G(iy)$ als $x \searrow 0$. Dan geldt voor elke positieve T en δ,

$$\begin{aligned} \left| \int_T^{T+\delta} \rho(t) dt \right| &\le \frac{4M}{R} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-R}^{R} G(iy) \frac{e^{\delta iy} - 1}{y} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) e^{iTy} dy \right|. \end{aligned} \tag{22}$$

Als in de onderstellingen R willekeurig groot genomen mag worden en ρ bovendien langzaam afnemend is, heeft men

$$\rho(T) \to 0 \quad \text{als} \quad T \to \infty. \tag{23}$$

Bewijs van stelling 2

Eerst volgt het bewijs van ongelijkheid (22).

Bewijs. We beschouwen de volgende functie, die analytisch is in het gehele z-vlak:

$$G_T(z) = \int_0^T \rho(t) e^{-zt} dt, \quad z = x + iy. \tag{24}$$

We moeten dan het verschil

$$G_{T+\delta}(0) - G_T(0) = \int_T^{T+\delta} \rho(t)dt \tag{25}$$

afschatten.

Bij het symposium ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag

Ter gelegenheid van de tachtigste verjaardag van Jaap Korevaar organiseerde Jan Wiegerinck in januari 2003 een feestelijk symposium met vier sprekers, waaronder drie van de promovendi van Korevaar. De sprekers staken de breedheid van Jaap en de invloed die hij op hen had niet onder stoelen of banken. Ook zijn enthousiaste, heldere en inspirerende manier van lesgeven, zijn liefde voor de wiskunde en zijn werkkracht werden genoemd: tien jaar geleden ging hij met pensioen maar vrijwel dagelijks kon men hem aantreffen op het KdV-instituut, de laatste jaren werkend aan een boek over Tauberstellingen.

Jaap, niet alle lezers zullen weten dat je vijfentwintig jaar in de Verenigde Staten gewerkt hebt.
Ik begon in 1940 met mijn studie, door de oorlogsomstandigheden grotendeels op eigen houtje en met maar weinig gelegenheid om hulp van anderen te krijgen. Na mijn studie werkte ik op het Mathematisch Centrum (nu CWI), de University of Wisconsin in Madison en de University of California in San Diego. In 1974 kwam ik terug naar Nederland als hoogleraar aan de UvA.

In 1993 ging je met pensioen. Je bleef onderzoek doen en vatte het plan weer op een boek te schrijven over Taubertheorie. Wat is Taubertheorie?
Stel je voor dat je een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots$ hebt, dan kun je je afvragen wanneer je deze reeks sommeerbaar met som A noemt. Je denkt dan onmiddellijk aan

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \to A,$$

anders gezegd als de reeks convergent is met som A. Maar het kan voorkomen dat een reeks niet convergent is maar dat we toch een som willen toekennen aan de reeks. Zo noemen we de reeks Cesàro-sommeerbaar als de rij van partiële sommen Cesàro-convergent is:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} \to A$$

Dan heeft de divergente reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ wèl een (Cesàro) som, namelijk $\frac{1}{2}$, anders gezegd Cesàro-sommeerbaarheid is krachtiger dan gewone convergentie. Sommige reeksen zijn ook niet sommeerbaar in deze nieuwe zin. Nog krachtiger is Abel-sommeerbaarheid van de reeks. Dat houdt in dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ convergent is voor } |x| < 1$$

$$\text{en } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to A \text{ als } x \uparrow 1$$

(i) Zij Γ de positief georiënteerde cirkel $C(0,R) = \{|z| = R\}$; zie figuur 2. De stelling van Cauchy geeft

$$2\pi i G_T(0) = \int_\Gamma G_T(z)\frac{1}{z}dz. \tag{26}$$

Denkend aan grote T ligt het voor de hand, om $G_T(z)$ in het rechter halfvlak $\{x > 0\}$ te vergelijken met $G(z)$:

$$|G_T(z) - G(z)| = \left|\int_T^\infty \rho(t)e^{-zt}dt\right| \le M\int_T^\infty e^{-xt}dt = \frac{M}{x}e^{-Tx}. \tag{27}$$

Enigszins analoog heeft men voor $x = \operatorname{Re} z < 0$,

$$|G_T(z)| = \left|\int_0^T \rho(t)e^{-zt}dt\right| \le \int_0^T Me^{-xt}dt < \frac{M}{|x|}e^{-Tx}. \tag{28}$$

(ii) Voor grote x wordt de factor e^{-Tx} in (27) veel kleiner dan nodig is, terwijl in (28), de factor $e^{-Tx} = e^{T|x|}$ juist veel te groot kan worden. Eén van Newmans briljante ideeën [14] was om in een Cauchy formule zoals (26), een factor e^{Tz} te introduceren onder het integraalteken:

$$2\pi i G_T(0) = \int_\Gamma G_T(z)e^{Tz}\frac{1}{z}dz.$$

Blijft nog het probleem dat de noemers x en $|x|$ in (27), (28) voor kleine $|x|$ problemen geven. Hiervoor bedacht Newman de volgende ingenieuze oplossing: vervang de factor $1/z$ in de Cauchy formule door $(1/z) + z/R^2$. Op de cirkel Γ geldt

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2}, \tag{29}$$

en volgens de residuënstelling heeft men

$$2\pi i G_T(0) = \int_\Gamma G_T(z)e^{Tz}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)dz. \tag{30}$$

(iii) In verband met (27) en (30) wil men ook $G(z)$ over een geschikte weg integreren. Maar $G(z)$ is in het algemeen niet analytisch in het linker halfvlak $\{x < 0\}$, dus die functie kan men niet over Γ integreren. Wel kan men de stelling van Cauchy toepassen op $G(z)/z$, of op

$$G(z)e^{Tz}\left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right),$$

als men integreert over een weg die geheel in het rechter halfvlak ligt. We voeren enkele speciale integratiewegen in. Zij Γ_1 het deel van Γ in het rechter halfvlak, Γ_2 het deel van Γ in het linker halfvlak. We noteren met σ het georiënteerde segment van de imaginaire as van iR naar $-iR$; zie figuur 2. Vervolgens voeren we, voor kleine $r > 0$, de hulpweg σ_r in, die bestaat uit het gedeelte van de lijn $x = r$ tussen het bovenste snijpunt $z_1 = r + i\sqrt{R^2 - r^2}$ met de cirkel Γ, en het onderste snijpunt $z_2 = r - i\sqrt{R^2 - r^2}$. Het deel van Γ_1 tussen z_2 en z_1 noemen we $\Gamma_{1,r}$. Dan geldt volgens Cauchy

$$0 = \int_{\Gamma_{1,r}+\sigma_r} G(z)e^{Tz}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz. \tag{31}$$

(iv) Combinatie van (30) en (31) geeft voor elke kleine $r > 0$

$$\begin{aligned} 2\pi i G_T(0) =& \int_{\Gamma_{1,r}} \{G_T(z)-G(z)\}e^{Tz}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \\ &+ \int_{\Gamma-\Gamma_{1,r}} G_T(z)e^{Tz}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \\ &- \int_{\sigma_r} G(z)e^{Tz}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \\ =& I_1(R,r,T)+I_2(R,r,T)-I_3(R,r,T), \end{aligned} \tag{32}$$

zeg. Er is een analoge formule voor $G_{T+\delta}(0)$. Op het eind moeten wij het verschil $G_{T+\delta}(0)-G_T(0)$ afschatten, in het bijzonder ook

$$\begin{aligned} I_3(R,r,T+\delta)-I_3(R,r,T) &= \int_{\sigma_r} G(z)\{e^{(T+\delta)z}-e^{Tz}\}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \\ &= \int_{\sigma_r} G(z)\frac{e^{\delta z}-1}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}dz. \end{aligned}$$

Wegens het gegeven randgedrag van $G(x+iy)$ voor $x \searrow 0$ mogen we hier r naar nul laten gaan, en dat mag dan ook in de formule voor $G_{T+\delta}(0)-G_T(0)$. Als resultaat verkrijgen we de ongelijkheid

$$\begin{aligned} &2\pi|G_{T+\delta}(0)-G_T(0)| \\ &\leq \left|\int_\sigma G(z)\frac{e^{\delta z}-1}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}dz\right| \\ &\quad + |I_1(R,0,T+\delta)-I_1(R,0,T)+I_2(R,0,T+\delta)-I_2(R,0,T)|. \end{aligned} \tag{33}$$

Hier verwijst $I_j(R,0,\cdot)$ naar integralen, verkregen door $\Gamma_{1,r}=\Gamma_1$ te nemen en $\sigma_r=\sigma$.

(v) Uit (32), (27) en (29) volgt

$$\begin{aligned} |I_1(R,0,T)| &\leq \int_{\Gamma_1} |G_T(z)-G(z)||e^{Tz}|\left|\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right||dz| \\ &\leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{x}e^{-Tx}e^{Tx}\frac{2x}{R^2}|dz| \\ &= \frac{2M}{R^2}\pi R = \frac{2\pi M}{R}. \end{aligned} \tag{34}$$

Op analoge manier geven (32), (28) en (29) dat

$$|I_2(R,0,T)| \leq \int_{\Gamma_2} |G_T(z)e^{Tz}|\left|\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right||dz| \leq \frac{2\pi M}{R}. \tag{35}$$

Dezelfde ongelijkheden gelden voor $|I_j(R,0,T+\delta)|$.
Combinatie van (25) met (33)–(35), en deling door 2π, geeft

$$\left|\int_T^{T+\delta}\rho(t)dt\right| \leq \frac{4M}{R}+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\sigma G(z)\frac{e^{\delta z}-1}{z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{Tz}dz\right|.$$

Substitueert men hier $z = iy$ met $-R \leq y \leq R$, dan volgt de gewenste ongelijkheid (22). $\square$

Zo is de reeks $1-2+3-4+\cdots$ niet Cesàro-sommeerbaar maar wel Abel-sommeerbaar, met som $\frac{1}{4}$. De Oostenrijkse wiskundige Tauber (1866–1942) bewees in 1897 een omkering van de implicatie ‘convergent $\Longrightarrow$ Abel-sommeerbaar’, en wel onder de extra conditie dat $na_n \to 0$. Later, in 1911, bewees Littlewood dat begrensdheid van de rij na_n ook voldoende is voor deze omkering. Dit is de start geweest van veel van zulke stellingen: een sterke vorm van sommeerbaarheid plus een extra conditie die een zwakkere vorm van sommeerbaarheid impliceert. Hardy en Littlewood introduceerden de term Tauberstelling voor een dergelijke omkering. Sinds het begin van de vorige eeuw heeft het gebied zich sterk ontwikkeld. Ik wil graag één belangrijke impuls noemen: de getaltheorie, in het bijzonder het zoeken naar eenvoudiger bewijzen van de priemgetalstelling.

Waarom schrijf je er een boek over?
Taubertheorie is een omvangrijk gebied van de wiskunde waar meer dan een eeuw aan gewerkt is, en waar nóg steeds mensen aan werken. Ikzelf heb daar ook mijn bescheiden steentje aan bijgedragen. Ik ben redelijk goed op de hoogte van de literatuur op dat gebied en had het gevoel dat het goed zou zijn die theorie nu eens systematisch te rangschikken, met eenheid in de terminologie, zo mogelijk ook met hier en daar een eenvoudiger bewijs. Ik had als beeld voor ogen een boek waarin de stand van zaken van dit moment weergegeven is. Enkele tientallen jaren geleden was mij al eens gevraagd een dergelijk boek te schrijven, maar hoewel ik wel al wat materiaal verzameld had was het er nooit van gekomen. In 1999 ben ik er uiteindelijk toch aan begonnen. Waar je bij het schrijven van zo’n overzicht mee geconfronteerd wordt is dat het boek steeds maar uitgebreider wordt.

Het is duidelijk dat je dit project met veel plezier gedaan hebt. Maar zoiets neemt natuurlijk veel tijd in beslag. Kwam je nog aan andere bezigheden toe?
Andere liefhebberijen zoals tuinieren en het luisteren naar muziek schoten er wel eens bij in, zeker de laatste tijd. Verder weet je dat ik het erg leuk vind om te wandelen. Ook daar had ik wat minder tijd voor, maar ik denk het binnenkort weer meer te gaan doen. Er zijn nog zoveel paden in Nederland waarover ik niet gelopen heb! Nog niet zo lang geleden schrok ik niet terug voor een tochtje van een kilometer of 25. Nu is 18 kilometer genoeg, je wordt tenslotte een jaartje ouder, nietwaar.

Peter de Paepe in: *Nieuwsbrief van het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde.*

Vervolgens bewijzen we de tweede bewering in stelling 2.

Bewijs. (vi) Voor vaste δ en R zal de laatste integraal in (22) naar nul gaan als $T \to \infty$. Inderdaad, als $G(z)$ analytisch is op het segment $[-iR, iR]$ van de imaginaire as, kan men partiële integratie toepassen: $e^{iTy}dy = \{1/(iT)\}de^{iTy}$, enz. Weet men alleen dat de randwaarden $G(iy)$ continu zijn of integreerbaar, dan kan men het Riemann–Lebesgue lemma gebruiken. De conclusie is in beide gevallen dat

$$\limsup_{T\to\infty}\left|\int_T^{T+\delta}\rho(t)dt\right|\le\frac{4M}{R}. \tag{36}$$

(vii) We nemen nu aan dat R willekeurig groot gekozen mag worden. Dan zal voor elk getal $\delta>0$,

$$\int_T^{T+\delta}\rho(t)dt\to 0\quad\text{als}\quad T\to\infty. \tag{37}$$

Onderstel tenslotte dat $\rho(t)$ langzaam afnemend is; zie (19). De ongelijkheid

$$\int_T^{T+\delta}\{\rho(t)-\rho(T)\}dt\ge-\int_T^{T+\delta}\varepsilon(t,T)dt$$

laat zien, dat

$$\delta\rho(T)\le\int_T^{T+\delta}\rho(t)dt+\int_T^{T+\delta}\varepsilon(t,T)dt.$$

Uit (37) en de eigenschappen van $\varepsilon(t,u)$ volgt dan, dat voor gegeven $\varepsilon>0$ en voldoend kleine $\delta>0$,

$$\limsup_{T\to\infty}\delta\rho(T)\le\varepsilon\delta,\quad\limsup_{T\to\infty}\rho(T)\le\varepsilon.$$

Dit geldt voor elke $\varepsilon>0$, zodat $\limsup\rho(T)\le 0$. Voor een ongelijkheid in de andere richting kan men beginnen met $\int_{T-\delta}^{T}\rho(t)dt$. □

Enkele nuttige eigenschappen

We verifiëren hier enkele eigenschappen van de zetafunctie en de functies $\pi(\cdot)$ en $\psi(\cdot)$, die nodig waren voor de afleiding van de PGS uit stelling 1. Diverse boeken bevatten meer achtergrondinformatie; klassieke titels zijn [11] en [6].

Lemma 1. *De functie*

$$g(z)=\zeta(z)-\frac{1}{z-1},\quad\mathrm{Re}\,z>1 \tag{38}$$

heeft een analytische voortzetting tot het halfvlak $\{\mathrm{Re}\,z>0\}$.

Bewijs. Uit (16) en (17) volgt dat

$$g(z)=\zeta(z)-\frac{1}{z-1}=1+z\int_1^\infty([v]-v)v^{-z-1}dv. \tag{39}$$

Omdat $[v]-v$ begrensd blijft, definieert de laatste integraal een analytische functie op het halfvlak $\{\mathrm{Re}\,z>0\}$. □

Lemma 2. *De functie $\zeta(z)$ heeft geen nulpunten op de lijn* $\{\mathrm{Re}\,z=1\}$.

Bewijs. Het Euler product (8) voor $z=x+iy$ met $x>1$ geeft:

$$\begin{aligned}\log|\zeta(x+iy)|&=\mathrm{Re}\sum_p-\log(1-p^{-z})=\mathrm{Re}\sum_p\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}p^{-kz}\\&=\sum_{p,k}\frac{1}{k}p^{-kx}\cos(ky\log p).\end{aligned} \tag{40}$$

Gebruik nu de nuttige relatie

$$3+4\cos\theta+\cos2\theta=2(1+\cos\theta)^2\ge0\quad\text{voor alle (reële)}\ \theta.$$

In combinatie met (40) geeft zij voor $\theta=ky\log p$:

$$3\log\zeta(x)+4\log|\zeta(x+iy)|+\log|\zeta(x+2iy)|\ge0,$$

zodat

$$\zeta^3(x)|\zeta^4(x+iy)||\zeta(x+2iy)|\ge1\qquad(x>1). \tag{41}$$

Stel nu een ogenblik dat de analytische functie $\zeta(z)$ een nulpunt zou hebben in het punt $z=1+iy$ (natuurlijk met $y\neq0$). Dan zou $\zeta^4(z)$ daar een nulpunt hebben van tenminste de orde 4, zodat $\zeta^4(x+iy)=O\{(x-1)^4\}$ wanneer $x\searrow1$. Daar echter $\zeta(x)=O\{1/(x-1)\}$ zou het linkerlid van (41) tot nul moeten naderen wanneer $x\searrow1$, een duidelijke tegenspraak! □

Lemma 3. *De telfunctie $\pi(t)$ voor de priemgetallen wordt voor $t\ge2$ begrensd door een constante maal $t/\log t$.*

Bewijs. De binomiaalcoëfficiënt $\binom{2n}{n}$ is deelbaar door alle priemgetallen p in $(n,2n)$, dus ook door hun product. Zodoende geldt

$$\prod_{n<p<2n}p\le\binom{2n}{n}<2^{2n}.$$

Voor $n=2^{k-1}$ volgt hieruit

$$(\log2^{k-1})\{\pi(2^k)-\pi(2^{k-1})\}\le\sum_{2^{k-1}<p<2^k}\log p<2^k\log2,$$

$$\pi(2^k)-\pi(2^{k-1})<\frac{2^k}{k-1},$$

zodat voor $k\ge3$ en $m=[k/2]$,

$$\begin{aligned}\pi(2^k)&<\pi(2^{m+1})+\frac{2^k}{k-1}+\frac{2^{k-1}}{k-2}+\cdots+\frac{2^{m+2}}{m+1}\\&\le2^{[k/2]+1}+\frac{2^{k+1}}{k/2}\le C\frac{2^k}{k}.\end{aligned}$$

□

Lemma 4. *De asymptotische relatie $\psi(t)\sim t$ voor de Chebyshev functie is equivalent met de priemgetalstelling.*

Bewijs. Analoog aan (13) heeft men voor $t\ge2$:

$$\psi(t)=\sum_{n\le t}\Lambda(n)\le\pi(t)\log t. \tag{42}$$

Voor $2 \leq u < p \leq t$ geldt

$$\pi(t) = \pi(u) + \sum_{u<p\leq t} 1 \leq \pi(u) + \sum_{u<p\leq t} \frac{\log p}{\log u} < u + \frac{\psi(t)}{\log u}.$$

Door $u = t/\log^2 t$ te nemen vindt men

$$\pi(t)\frac{\log t}{t} < \frac{1}{\log t} + \frac{\psi(t)}{t}\frac{\log t}{\log t - 2\log\log t}. \tag{43}$$

Combinatie van (42) en (43) laat zien dat

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t)\frac{\log t}{t} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} = 1.$$

□

Referenties

1 Bateman, P.T. and Diamond, H.G., A hundred years of prime numbers. Amer. Math. Monthly **103** (1996), 729–741.

2 Bochner, S., Ein Satz von Landau und Ikehara. Math. Z. **37** (1933), 1–9.

3 Diamond, H.G., Elementary methods in the study of the distribution of prime numbers. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), 553–589.

4 Erdős, P., On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35**, 374–384.

5 Hadamard, J. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. Bull. Soc. Math. France **24**, 199–220.

6 Hardy, G.H. and Wright, E.M., An introduction to the theory of numbers, fifth edition. Clarendon Press, Oxford, 1979. (First edition 1938.)

7 Ikehara, S., An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers. J. Math. and Phys. M.I.T. **10** (1931), 1–12.

8 Korevaar, J., On Newman's quick way to the prime number theorem. Math. Intelligencer **4** (1982), 108–115.

9 Korevaar, J., A century of complex Tauberian theory. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), 475–531.

10 Korevaar, J., Tauberian Theory. Grundl. math. Wiss. vol. 329, Springer, Berlin, 2004.

11 Landau, E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II. Teubner, Leipzig, 1909. (Second edition with an appendix by P. T. Bateman, Chelsea Publ. Co., New York, 1953.)

12 Landau, E., Über den Wienerschen neuen Weg zum Primzahlsatz. Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse, 1932, 514–521.

13 Narkiewicz, W., The development of prime number theory. Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 2000.

14 Newman, D.J., Simple analytic proof of the prime number theorem. Amer. Math. Monthly **87** (1980), 693–696.

15 Selberg, A., An elementary proof of the prime-number theorem. Ann. of Math. (2) **50**, 305–313.

16 Tenenbaum, G. and Mendès France, M., The prime numbers and their distribution. Student Math. Library vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. (Translation of the French edition of 1997.)

17 de la Vallée Poussin, C., Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, I. Ann. Soc. Sci. Bruxelles **20**:2, 183–256.

18 Wiener, N., Tauberian theorems. Ann. of Math. **33** (1932), 1–100.

19 Wiener, N., The Fourier integral and certain of its applications. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933.

20 Zagier, D., Newman's short proof of the prime number theorem. Amer. Math. Monthly **104** (1997), 705–708.