Arno van den Essen
Subfaculteit Wiskunde
Katholieke Universiteit
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen
essen@math.kun.nl

Beroemde problemen

Rondom het Jacobivermoeden

Zoals elke levende tak van wetenschap kent wiskunde grote open problemen. Beroemd is de Claylijst van zeven Millennium Prize Problems uit het jaar 2000; het oplossen van elk ervan levert een bedrag van een miljoen dollar op. Een andere lijst, met 18 problemen (waarvan er 4 ook op de Claylijst staan) werd opgesteld door Steve Smale ter gelegenheid van de zestigste verjaardag van V. Arnold in 1997 en gepubliceerd in de Mathematical Intelligencer in 1998. Buiten genoemde lijsten hebben we het Goldbachvermoeden, het Collatzprobleem, het abc-vermoeden en nog veel meer. Als onderdeel van een reeks artikelen over dergelijke problemen geeft Arno van den Essen, expert op het gebied van probleem 16 uit de lijst van Smale, uitleg, achtergronden en verbanden van dit Jacobiprobleem.

Zij $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding, dat wil zeggen iedere F_i is een veelterm in n variabelen over $\mathbf{C}$. Hoe kunnen we nagaan of zo'n F een inverse heeft? A priori kan je die vraag op verschillende manieren interpreteren: zoeken we naar een inverse in verzamelingentheoretische zin, of willen we een inverse die evenals F een holomorfe afbeelding van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^n$ definieert, of willen we, sterker nog, een inverse die zelf ook weer een veeltermafbeelding is? Dit blijkt niet uit te maken: een stelling van A. Bialynicki-Birula en M. Rosenlicht uit 1962 zegt dat als F injectief is dan is hij vanzelf inverteerbaar en de inverse is weer een veeltermafbeelding! Als F inverteerbaar is, zeg met inverse G, dan volgt uit $G \circ F = x$ en de kettingregel dat $(JG)(F)JF = I_n$, waarbij $JF = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$ de Jacobimatrix van F is. Door determinanten te nemen zien we dat $\det(JG)(F)$ en $\det JF$ veeltermen zijn met product 1, waaruit volgt dat $\det JF \in \mathbf{C}^*$. Omgekeerd hebben we

Het Jacobivermoeden
Als $\det JF \in \mathbf{C}^*$, dan is F inverteerbaar.

Het Jacobivermoeden werd voor het eerst geformuleerd in 1939. De naam komt af van de in de formulering benodigde determinant van de Jacobimatrix. C.G.J. Jacobi (1804–1851) zelf heeft voorzover bekend nooit iets met het vermoeden dat zijn naam draagt, te maken gehad. Er zijn honderden publicaties over dit probleem en in 1998 verscheen het als probleem 16 op een door Steve Smale samengestelde lijst van 18 beroemde problemen voor wiskundigen van de eenentwintigste eeuw. Het Jacobivermoeden is nog steeds open voor alle $n \geq 2$. Het doel van dit artikel is enkele equivalente formuleringen en verrassende verbanden met andere vermoedens te bespreken.

Enkele 'klassieke' resultaten

Het Jacobivermoeden, van nu af kortweg met JV aangeduid, werd voor het eerst geformuleerd door O. Keller in 1939. In plaats van veeltermafbeeldingen met coëfficiënten in $\mathbf{C}$ bestudeerde hij die met coëfficiënten in **Z**. Hij bewees dat het JV waar is als je weet dat F een inverse heeft die uit rationale functies bestaat; met andere woorden als

$$\mathbf{C}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{C}(F_1,\ldots,F_n). \tag{1}$$

Dit resultaat werd in de jaren vijftig en zestig gevolgd door een aantal foutieve bewijzen: eerst van Engel (een student van Keller), daarna drie keer Segre en tenslotte in 1961 Gröbner die een puur algebraïsch 'bewijs' gaf. Positieve resultaten waren er natuurlijk ook: zo bewees T. Moh in 1983 dat voor $n = 2$ het JV waar is als F_1 en F_2 beiden graad ≤ 100 hebben. Direct hierna kon op vele plaatsen het gerucht gehoord worden, dat er voor $n = 2$ een tegenvoorbeeld was gevonden, met een F_1 van graad 101(!). Twee jaar later bewezen H. Appelgate en H. Onishi het 2-dimensionale JV voor het geval dat de graad van F_1 of F_2 een product van ten hoogste twee priemgetallen is. Het eerste resultaat in dimensie $n > 2$ na dat van Keller is afkomstig van L. Campbell (1973): hij generaliseerde Keller's stelling door aan te tonen dat (1) al volgt als $\mathbf{C}(F_1,\ldots,F_n) \subset \mathbf{C}(x_1,\ldots,x_n)$ een Galoisuitbreiding is. Zeven jaar later toonde S. Wang aan dat het JV waar is als iedere F_i graad ≤ 2 heeft. Een zeer kort bewijs hiervoor is afkomstig van S. Oda, dezelfde die op 8 juli 2003 een foutief 'bewijs' op het internet zette.

Hier Oda's argument: stel $\det JF \in \mathbf{C}^*$ en $\deg F_i \leq 2$ voor alle i. Zoals al opgemerkt is het voldoende te laten zien dat F injectief is. Neem daarom aan dat $F(a) = F(b)$ voor zekere $a, b \in \mathbf{C}^n$. Definieer $G(x) := F(x+a) - F(a)$ en $c := b - a$. Dan $\deg G_i \leq 2$ voor alle i en $G(0) = 0 = G(c)$. Merk op dat $JG(x) = JF(x+a)$, dus $\det JG \in \mathbf{C}^*$. Schrijf nu $G = G_{(1)} + G_{(2)}$, zijn ontwikkeling in homogene componenten. Door $G(tc) = tG_{(1)}(c) + t^2G_{(2)}(c)$ te differentiëren naar t zien we

$$G_{(1)}(c) + 2tG_{(2)}(c) = \frac{d}{dt}G(tc) = JG(tc)\cdot c.$$

Hier $t = \frac{1}{2}$ invullen levert $0 = G(c) = JG(c/2)\cdot c$. Omdat $\det JG(c/2) \neq 0$, volgt $c = 0$, dus F is injectief.

Nu zal de lezer misschien denken dat dit wel een zeer speciaal geval van het JV is. Dat is zo, maar ongeveer gelijktijdig met Oda's resultaatje werd onafhankelijk van elkaar door A. Yagzhev en door H. Bass, E. Connell en D. Wright de volgende verrassende reductiestelling bewezen: het is voldoende het JV te bewijzen voor veeltermafbeeldingen F met $degF_i \leq 3$ voor alle i. Preciezer, het is voldoende afbeeldingen van de vorm $F = x + H = (x_1 + H_1,\ldots,x_n + H_n)$ te bekijken waarbij iedere H_i nul of homogeen van de graad 3 is. We noemen zulke F's cubisch homogeen. Voor $n = 3$ bewees D. Wright het cubisch homogene geval in 1993 en het $n = 4$ geval werd een jaar later door E. Hubbers in z'n Nijmeegse afstudeerwerk bewezen (gebruik makend van een computer). Het bewijs van bovengenoemde reductiestelling is gebaseerd op de stabilisatie filosofie uit de K-theorie: een probleem wordt eenvoudiger als je het opvat in een hogere dimensie. Voortbordurend op deze gedachte bewees J. Yu in 1993 een tweetal opzienbarende resultaten. Hij bestudeerde veeltermafbeeldingen met reële coëfficiënten. Preciezer, zij $F = x + F_{(2)} + \ldots + F_{(d)} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een veeltermafbeelding met reële coëfficiënten, waarbij $F_{(i)}$ de homogene component van F is van graad i. Noem F positief (respectievelijk negatief) als alle niet nul coëfficiënten die in de $F_{(i)}$ optreden positief (respectievelijk negatief) zijn. Yu toonde aan dat het JV waar is als voor iedere $n \geq 2$ en iedere positieve $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ met $\det JF = 1$, F injectief is. Vervolgens liet hij zien dat alle negatieve F's met $\det JF = 1$ inverteerbaar (en dus injectief) zijn! Yu's resultaten maakten deel uit van een mislukte poging het JV te bewijzen: hij probeerde het geval van positieve F's te herleiden tot dat van negatieve F's. Echter steeds kwam hij ergens weer een minteken tekort. Deze poging gaf mij uiteindelijk meer aanleiding om aan het JV te twijfelen, dan het te geloven!

Het reële Jacobivermoeden

In het begin van de jaren zeventig werd het reële JV ingevoerd:

RJV(n)
Zij $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een veeltermafbeelding waarvoor geldt dat $\det JF(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbf{R}^n$. Dan is F injectief.

Merk op dat als we in dit vermoeden **R** door **C** vervangen, dan krijgen we het JV terug: de conditie $\det JF(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbf{C}^n$ betekent dat $\det JF \in \mathbf{C}^*$ en zoals opgemerkt is injectiviteit van een veeltermafbeelding van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^n$ equivalent met de inverteerbaarheid ervan. Maar het reële JV is meer dan een reëel analogon van het JV, het impliceert ook het JV. Preciezer, er geldt RJV($2n$)$\Rightarrow$JV(n). Immers, door $\mathbf{C}^n$ op te vatten als reële vectorruimte van dimensie $2n$, geeft een veeltermafbeelding $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ ook een veeltermafbeelding $\tilde{F} :=: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$. Is bijvoorbeeld $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de afbeelding gegeven door $F(z) = z^2$, dan is $\tilde{F}$ de afbeelding van $\mathbf{R}^2$ naar $\mathbf{R}^2$ gegeven door $\tilde{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Er geldt dat $\det J\tilde{F} = |\det JF|^2$. Zij $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding met $\det JF \in \mathbf{C}^*$. Dan is $\det J\tilde{F} \in \mathbf{R}^*$. Uit RJV($2n$) volgt dat $\tilde{F}$ en dus ook F injectief is. Bijgevolg is F inverteerbaar, en geldt JV(n)!

Via deze implicatie het JV bewijzen werkt evenwel niet: in 1994 vond S. Pinchuk het volgende tegenvoorbeeld voor RJV(2), en daarmee voor iedere RJV(n) met $n \geq 2$:

Zij $t = xy - 1$, $h = t(xt+1)$, $f = (xt+1)^2(\frac{h+1}{x})$, $p = f + h$ en $q = -t^2 - 6th(h+1) - 170fh - 91h^2 - 195fh^2 - 69h^3 - 75h^3f - \frac{75}{4}h^4$. Dit zijn allemaal veeltermen. Voor $F := (p,q)$ is $F(1,0) = F(-1,-2) = (0,-1)$ en $\det JF = t^2 + (t + f(13+15h))^2 + f^2 > 0$ voor alle x, y in **R**.

Dynamische systemen en het Jacobivermoeden

Stabiliteitstheorie van autonome stelsels differentiaalvergelijkingen startte met het pionierswerk van Lyapunov in zijn proefschrift rond 1892. Hij bewees onder meer dat als $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een C^1-vectorveld is met $F(0) = 0$, zodanig dat de reële delen van alle eigenwaarden van $JF(0)$ negatief zijn, dan is 0 een locale attractor van het stelsel $\dot{x}(t) = F(x(t))$. Anders gezegd, iedere oplossing die voldoende dicht bij 0 begint, is gedefinieerd voor alle $t > 0$ en convergeert naar 0 voor $t \to \infty$.

In 1960 formuleerden L. Markus en H. Yamabe een globale versie van dit resultaat als vermoeden:

MYC(n)
Zij $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een C^1-vectorveld met $F(0) = 0$. Als voor iedere $x \in \mathbf{R}^n$ de reële delen van alle eigenwaarden van $JF(x)$ negatief zijn, dan is 0 een globale attractor van het stelsel $\dot{x}(t) = F(x(t))$, dus *elke* oplossing van dit stelsel is gedefinieerd voor alle $t > 0$ en convergeert naar 0 als $t \to \infty$.

Dit heet het Markus-Yamabe-vermoeden en ook wel het Jacobi-vermoeden voor differentiaalvergelijkingen. Na 33 jaar werd het vermoeden voor $n = 2$ bewezen, zowel door C. Gutierrez als door R. Fessler. In datzelfde jaar verscheen er een (ongepubliceerd) manuscript van Fournier en Martelli waarin ze een verband legden met het JV. Ze toonden aan dat als het Markus-Yamabe-vermoeden waar is voor alle $n \geq 2$ en alle polynomiale vectorvelden $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ met $\deg F_i \leq 3$ voor alle i, dan is het JV waar. Er was dus hoop dat het JV met theorie over dynamische systemen bestudeerd kon worden. Echter het omgekeerde gebeurde. In 1995 toonde de auteur, in samenwerking met E. Hubbers in Nijmegen en A. Cima, A. Gasull en F. Mañosas in Barcelona, aan dat voor iedere $n \geq 3$ het Markus-Yamabe-vermoeden fout was. Preciezer, zij $n \geq 3$ en $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ gegeven door

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1 + x_3 d^2, -x_2 - d^2, -x_3, \ldots, -x_n)$$

waarbij $d := x_1 + x_3 x_2$. Dan heeft $JF(x)$ voor iedere $x \in \mathbf{R}^n$ als enige eigenwaarde -1 en $x_1(t) = 18e^t$, $x_2(t) = -12e^{2t}$, $x_3(t) = \ldots = x_n(t) = e^{-t}$ is een oplossing van $\dot{x}(t) = F(x(t))$ die naar oneindig gaat als $t \to \infty$.

Bovenstaand voorbeeld heeft $\deg F_1 = 5$ en $\deg F_2 = 4$, terwijl voor het JV het Markus-Yamabe-vermoeden voor het geval dat $\deg F_i \leq 3$ voor alle i al voldoende zou zijn. Echter een jaar later werden er door de auteur voor iedere $n \geq 5$ nieuwe voorbeelden gevonden die wel aan deze extra graad voorwaarde voldeden. Hiermee was weer een idee het JV te bewijzen de grond in geboord.

Knopen, het Jacobivermoeden en de missing link

Een geheel ander verband met het JV wordt gegeven door het zogeheten Cancellationprobleem (CP), wat teruggaat naar Oskar Zariski in 1949. Meetkundig kan het probleem als volgt worden geformuleerd.

CP(n)
Zij $n \geq 1$ en V een affiene algebraïsche variëteit over $\mathbf{C}$ zodanig dat $V \times \mathbf{C} \simeq \mathbf{C}^{n+1}$. Volgt dan dat $V \simeq \mathbf{C}^n$ (als algebraïsche variëteiten)?

Algebraïsch geformuleerd is dit de vraag of een $\mathbf{C}$-deelalgebra A van $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ zodanig dat $A[T] \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$, voldoet aan $A \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Een bevestigend antwoord voor $n = 1$ werd in 1972 gegeven door S. Abhyankar, P. Eakin en W. Heinzer en voor $n = 2$ in 1980 door M. Miyanishi en T. Sugie. Zij bewezen de ietwat sterkere uitspraak voor $n = 1$ respectievelijk $n = 2$ dat voor iedere $p \geq 1$ uit $V \times \mathbf{C}^p \simeq \mathbf{C}^{p+n}$ volgt dat $V \simeq \mathbf{C}^n$.

In 1973 publiceerde Miyanishi een verband met het JV: als het JV waar is en het Serre-vermoeden ook, dan heeft het Cancellationprobleem een bevestigend antwoord. Dit Serre-vermoeden (de bewering dat eindig voortgebrachte projectieve modulen over een polynoomring zoals $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ vrij zijn) is in 1976 bewezen door D. Quillen en A. Suslin, dus, volgens Miyanishi, $JV \Rightarrow CP$. We richten daarom onze aandacht op het Cancellationprobleem. Daartoe geven we een herformulering in termen van zogeheten locaal nilpotente derivaties.

Zij R een $\mathbf{Q}$-algebra. Een lineaire afbeelding $D : R \to R$ heet een derivatie als geldt $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ voor alle a, b in R. Zo'n derivatie heet locaal nilpotent als er voor iedere a in R een natuurlijk getal m bestaat met $D^m(a) = 0$. Een element s in R heet een slice van een derivatie D als $D(s) = 1$. De partiële algeleide $\frac{\partial}{\partial x_i}$ op de veeltermring $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ is een voorbeeld van een locaal nilpotente derivatie, met $s = x_i$ als slice. Het Cancellationprobleem blijkt equivalent te zijn met:

CP'(n)
Zij D een locaal nilpotente derivatie op $R := \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Neem aan dat D een slice in R heeft. Is dan $ker D \simeq_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$?

Geïnspireerd door het artikel [2] van T. Asanuma vonden Peter van Rossum en de auteur in 2001 een klasse van locaal nilpotente derivaties met een slice. Om deze klasse te kunnen beschrijven geven we eerst een klein intermezzo over inbeddingen.

Zij $f = (f_1(t), \ldots, f_n(t)) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding. f heet een inbedding van $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}^n$ als f injectief is en overal een raakvector heeft, oftewel $f'(z) \neq 0$ voor alle z in $\mathbf{C}^n$. Een fundamentele vraag is, of zo'n inbedding rectificeerbaar is: dit wil zeggen, bestaat er een inverteerbare veeltermafbeelding $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ zodat $F(f_1(t), \ldots, f_n(t)) = (t, 0, \ldots, 0)$?

Voor $n = 2$ werd dit probleem bevestigend beantwoord door S. Abhyankar en T. Moh en ook door M. Suzuki (1974). Voor $n \geq 4$ gaven zowel A. Craighero als Z. Jelonek een bevestigend antwoord. Het geval $n = 3$ is nog steeds onopgelost.

We keren terug naar het Cancellationprobleem. Zij $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding. Definieer daarbij een derivatie D_f op de veeltermring in $n + 2$ variabelen $A := \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, t, u]$ als

$$D_f = f_1'(t)\partial_{x_1} + \ldots + f_n'(t)\partial_{x_n} + u\partial_t.$$

Het is eenvoudig in te zien dat $D := D_f$ een locaal nilpotente derivatie is. We bewijzen nu dat D een slice heeft in A als f een inbedding is: in dat geval geldt namelijk $\mathbf{C}[t] = \mathbf{C}[f_1(t), \ldots, f_n(t)]$. Dus bestaat een veelterm $P \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ met $t = P(f_1(t), \ldots, f_n(t))$. Merk op $D(f_i(t) - ux_i) = 0$ voor alle i, dus $D(P(f - ux)) = 0$. Bijgevolg $u = D(t) = D(t - P(f - ux))$. Verder $P(f - ux) \equiv P(f) = t (\mathrm{mod}\ u)$, oftewel $t - P(f - ux) = us$ voor zekere $s \in A$. Omdat $u = D(t - P(f - ux))$, volgt $u = D(us) = uD(s)$ en $D(s) = 1$, dus s is een slice van D in A!

Samengevat, voor iedere inbedding $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^n$ hebben we een locaal nilpotente derivatie D_f die een slice heeft in $\mathbf{C}[x, t, u]$. De vraag is nu of $ker(D_f, \mathbf{C}[x, t, u])$ $\mathbf{C}$-isomorf is met een veeltermring in $n + 1$ variabelen over $\mathbf{C}$. In [8] bewijzen we dat het antwoord op deze vraag bevestigend is als $n \neq 3$. Nu resteert de vraag hoe dit zit voor $n = 3$. Bekijk daartoe de (open) klaverblad knoop, door A. Shastri geparametriseerd door middel van $f(t) = (t^3 - 3t, t^4 - 4t^2, t^5 - 10t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$. Ook als afbeelding van $\mathbf{C}$ naar $\mathbf{C}^3$ is f een inbedding, want $t = P(f_1, f_2, f_3)$, voor $P = yz - x^3 - 5xy + 2z - 7x$. Shastri formuleerde het vermoeden dat deze inbedding niet rectificeerbaar is. Dit leidde ons tot het volgende vermoeden: de derivatie D_f behorende bij de klaverbladknoop geeft een tegenvoorbeeld voor het Cancellationprobleem!

De oplettende lezer zal zich afvragen wat dit betekent voor het JV, immers een kandidaat tegenvoorbeeld voor het CP levert volgens de implicatie JV⇒CP van Miyanishi een kandidaat tegenvoorbeeld voor het JV en bovendien bestaan er voor het testen van inverteerbaarheid verschillende algoritmen! Na nauwkeurig het artikel van Miyanishi bekeken te hebben bleek er een serieuze fout in te zitten! We hebben dus de belangrijke implicatie JV⇒CP helemaal niet; deze heet nu de 'missing link'. Het vinden van deze link zou, zoals hierboven uiteengezet is, kunnen leiden tot het oplossen van drie lang openstaande vermoedens.

Enkele recente ontwikkelingen

Zij $F : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ een veeltermafbeelding van de vorm $F = x + H$ met H homogeen van de graad $d \geq 2$. Dan is het bekend dat de conditie $\det JF \in \mathbf{C}^*$ equivalent is met de nilpotentie van de matrix JH. Zoals eerder beschreven, is het voldoende het JV te bewijzen voor alle $n \geq 2$ en alle veelterm afbeeldingen van de vorm $F = x + H$ met H homogeen van de graad 3 en JH nilpotent. Recentelijk ([3], Juni 2003) hebben Michiel de Bondt en de auteur bewezen dat bovendien mag worden aangenomen dat JH symmetrisch is. Onder deze extra aanname hebben we het JV voor $n \leq 5$ kunnen bewijzen (H mag zelfs homogeen zijn van willekeurige graad ≥ 2). Het gewone JV is evenwel nog steeds open, zelfs voor $n = 2$.

Behalve het JV is er in de exotische wereld van veeltermafbeeldingen nog een prominent vermoeden: het tamme voortbrengers vermoeden. Dit vermoeden zegt dat iedere inverteerbare veeltermafbeelding van $\mathbf{C}^n$ naar $\mathbf{C}^n$ een eindig product is van elementaire veeltermafbeeldingen. Dit zijn afbeeldingen van de vorm

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

waarbij $\alpha \in \mathbf{C}^*$, en a is een veelterm in $x_1, \ldots, x_n$ die geen x_i bevat.

Dit vermoeden werd voor $n = 2$ in 1942 door H. Jung bewezen. In 1972 formuleerde M. Nagata het kandidaat tegenvoorbeeld

$$\sigma = (x - 2qy - q^2 z, y + qz, z)$$

waarbij $q = xz + y^2$. In een recent manuscript [6] tonen I. Shestakov en U. Umirbaev op ingenieuze wijze aan dat deze Nagata-afbeelding inderdaad niet tam is, waarmee het tamme voortbrengers vermoeden na meer dan zestig jaar is opgelost!

Laten we hopen dat het JV spoedig zal volgen, temeer daar nu ook steun uit de onverwachte hoek van de mathematische fysica is gekomen [1].

Referenties

1 A. Abdesselam, 'The Jacobian Conjecture as a Problem of Perturbative Quantum Field Theory', *Ann. H. Poincaré* (**4**) (2003), p. 199–215.

2 T. Asanuma, 'Non-linearizable algebraic k^*-actions on affine spaces', *Invent. Math.* (**138**) (1999), p. 281–306.

3 M. de Bondt and A. van den Essen, *A reduction of the Jacobian Conjecture to the symmetric case*, Report 0308 (Juni 2003), University of Nijmegen (verschijnt in Proceedings of the AMS).

4 A. van den Essen, 'Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture', *Progress in Math., Birkhäuser* (**190**) (2000).

5 O. Keller, 'Ganze Cremona-Transformationen', *Monatsh. Math. Phys.* (**47**) (1939), p. 299–306.

6 I. Shestakov and U. Umirbaev, 'The tame and wild automorphisms of polynomial rings in three variables' *Journal of the AMS* (**1**) (2004), p. 197–227 (electronic).

7 S. Smale, 'Mathematical problems for the next century', *Math. Intellingencer* (**20**) (1998), p. 209–212.

8 A. van den Essen and P. van Rossum, 'Triangular derivations related to problems on affine n-space', *Proc. of the A.M.S.* (**130**) No. 5 (2001), p. 1311–1322.