Wim Groen
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1083a
1081 HV Amsterdam
we.groen@few.vu.nl

Onderwijs

Vier decennia wiskundeonderwijs

Op vrijdag 28 maart heeft de afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit een symposium georganiseerd ter ere van het afscheid van Wim Groen, vakdidacticus wiskunde. Het was gewijd aan de nieuwste ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs op het vwo. Dit onderwijs is vanaf de zestiger jaren fors opgeschoven in de richting van het modelleren. Hoe ging deze verandering in zijn werk? Wat zijn de gevolgen voor het niveau van de wiskundebeoefening in Nederland? Wim Groen gaat op deze vragen in.

Het thema van deze middag is: Wiskunde op het vwo, waarom doen we daar eigenlijk aan? Het is mijn bedoeling u tijdens een korte tocht langs ruim veertig jaar wiskundeonderwijs te laten zien hoe het antwoord op die vraag veranderd is.

Een tweede vraag waar ik een voorzichtig antwoord op wil geven, is: Is het wiskundige niveau van de vwo-leerlingen in de afgelopen veertig jaar aanwijsbaar gedaald?

Uit het Paroolartikel 'Van vijfhonderd naar honderd' van 15 maart 2003 ontleen ik het volgende citaat: "Eens stond de Nederlandse wiskunde aan de internationale top. Maar die tijd is voorbij. Haakjes wegwerken, breuken onder een noemer brengen: vwo-scholieren kunnen het niet meer. [...] Abstract denken komt steeds minder aan bod op het vwo. Het middelbare schoolonderwijs is ook te veel versnipperd in kleine onderwerpjes. Een andere grote boosdoener is de rekenmachine. Scholieren zijn gewend dat ding overal voor te pakken, kunnen heel weinig nog uit het hoofd."
De hoogleraar wiskunde die de journalist deze woorden in de pen geeft, heeft over het antwoord op de niveauvraag een duidelijke mening. Ik zal proberen na te gaan of de feiten hem gelijk geven.

Idealen in de jaren zestig

Ik begin bij 1961 het jaar waarin ik als schuchtere jonge man de eerste stappen op het leraarspad zette. Naast mijn benoeming tot leraar deed zich in het wiskundeonderwijs in 1961 nog iets belangrijks voor. De staatssecretaris van onderwijs installeerde op 19 juli 1961 de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) die de opdracht kreeg het wiskunde onderwijs grondig op de schop te nemen; Stubenrouch, de staatssecretaris, zei in zijn installatierede onder andere: "Allerwegen wordt het standpunt ingenomen dat in de westelijke landen het onderwijs in de wiskunde is achtergebleven bij de ontwikkeling van de wetenschappelijke beoefening van de stof. De kloof tussen de wiskundeleerstof van de scholen voor het VHMO [voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs] en de universitaire wiskunde is hierdoor in de laatste decenniën steeds groter geworden, zulks ten nadele van de opleiding van de voor de maatschappij noodzakelijke wiskundigen." [1]

De voorzitter van de commissie, de wiskundige prof Leeman, merkt in zijn antwoord aan de staatssecretaris op: "Iemand die zich in deze snel veranderende wereld enigszins thuis wil voelen en die de hem toegemeten taak in de maatschappij op een voor hem en zijn medemensen bevredigende wijze wil vervullen, zal ongetwijfeld enig begrip van die wetenschap moeten hebben, waarvan de technische resultaten hem, bijna dagelijks in verbazing brengen." [2]

Even verder: "Veelal wordt de noodzaak

tot modernisering gebaseerd op het argument dat in onze maatschappij een steeds groeiende behoefte aan wiskundig geschoolden valt te constateren. Als men hiermee wil zeggen dat de wiskunde een steeds belangrijker deel van de westerse cultuur is gaan vormen en dat dus ieder die aan deze cultuur deel wenst te hebben zich enig begrip van de moderne wiskunde moet eigen maken, dan kan ik het daarmee volledig eens zijn. [...]

Bedoelt men echter met wiskundige geschoolden universitair opgeleide specialisten, zoals steeds meer gevraagd worden door allerlei instanties, dan meen ik dat we voorzichtig moeten zijn. Bij de opleiding van jonge mensen tot wiskundigen gaat het immers om hen die voor dit vak een bijzondere aanleg bezitten en het lijkt me toe dat hun aantal op een bevolking van 11.000.000 zielen niet zo bijzonder groot kan zijn. We zullen er rekening mee moeten houden, dat in ons land het aantal wiskundige specialisten, dat zijn dus zij die aan een universiteit met hoofdvak wiskunde afstuderen, aan natuurlijke grenzen gebonden is.

Of het tegenwoordige aantal van ongeveer een vijftiental per jaar belangrijk kan worden opgevoerd, als we door een doelmatiger leerplan op de middelbare school meer jongelieden dan tot nog toe kunnen animeren om in wiskunde door te gaan, zal de tijd moeten leren.” [3]

Opvallend vind ik drie dingen:

1. De staatssecretaris baseert de noodzaak tot vernieuwing vooral op de kloof tussen de schoolwiskunde en de universitaire wiskunde;
2. De voorzitter van de commissie benadrukt dat kennis van de wiskunde nodig is om je in de maatschappij te kunnen thuisvoelen en je rol naar behoren te kunnen spelen;
3. De scepsis van Leeman over de mogelijke aantallen professionele wiskundigen.

U moet bedenken dat op het moment dat deze woorden worden uitgesproken zojuist de eerste eindexamens volgens de nieuwe examenprogramma’s van 1958 waren afgenomen. Er was dus, na jarenlange discussies, nog maar net een vernieuwd curriculum in gebruik.

Het werk van de CMLW heeft uiteindelijk geleid tot de programma’s van 1968, die vooral bekend zijn geworden door de introductie in de schoolwiskunde van de verzamelingentaal, de teloorgang van de euclidische meetkunde en de opkomst van de vectormeetkunde. Van de tweeledige opdracht aan de commissie, namelijk zowel de kloof tussen de schoolwiskunde en de wetenschappelijke wiskunde verkleinen als de maatschappelijke relevantie van de schoolwiskunde vergroten, is niet zo veel terecht gekomen.

Het eindexamen van 1962

Het wordt tijd om wat concreter te worden. Wat werd er aan de eindexamenkandidaten van 1962 gevraagd? Ik heb voor u enkele examenopgaven algebra uit de periode 1961 tot heden verzameld. En om een beetje te kunnen vergelijken, neem ik steeds, indien mogelijk, de opgave die over functies en grafieken gaat.

Examen Algebra Gymnasium 1962, opgave 2:
Gegeven zijn de functies $f(x) = px^2$ en $g(x) = (p+1)x$, waarin $p > 0$.

a. Druk de abscissen van de snijpunten van de grafiek van $f(x)$ en $g(x)$ in p uit.
b. Bewijs, dat de oppervlakte van de door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ begrensde figuur gelijk is aan $\frac{(p+1)^3}{6p^2}$.
c. Bereken de waarde van p, waarvoor de onder b genoemde oppervlakte een uiterste waarde aanneemt, als p veranderlijk is. Bereken deze uiterste waarde, en onderzoek of de uiterste waarde een maximum of een minimum is. [4]

Welke vaardigheden werden er in 1962 van de kandidaat blijkbaar verwacht?

Bij vraag a het oplossen in x van de vergelijking $px^2 = (p+1)x$. Bekende fout is natuurlijk het vergeten van de oplossing $x = 0$. Maar als je een plaatje maakt, p is positief dus het schetsje is eenvoudig, kan er eigenlijk weinig misgaan. Bij vraag b moet je de integraal

$$\int_0^{\frac{p+1}{p}} ((p+1)x - px^2)dx$$

opstellen en berekenen. Je moet de grenzen goed kiezen en de volgorde van de functies in de integrand is natuurlijk ook van belang. Om te voorkomen dat een kandidaat die in vraag a een foutje heeft gemaakt ook bij vraag b de mist in gaat, is het antwoord al gegeven en moet je alleen maar laten zien dat het klopt.

Bij vraag c ten slotte moet je de functie $O(p) = \frac{(p+1)^3}{6p^2}$ differentiëren, een tekenverloop van de afgeleide maken, vaststellen dat er tekenwisseling is bij en daaruit concluderen dat er een minimum is ter grootte $9/8$.

Wat het rekenwerk betreft: er waren geen hulpmiddelen dan de logaritmetafel. Je moest het dus allemaal met de hand kunnen. De vragen a en b zou je ook nu nog aan eindexamenkandidaten kunnen stellen, maar uit de resultaten van onze instaptoetsen, waarmee we proberen na te gaan welk rekenwerk onze aankomende studenten nog met de hand kunnen uitvoeren, trek ik de conclusie dat het gereken met de quotiëntregel dat je in vraag c nodig hebt, tegenwoordig maar door weinigen tot een goed einde wordt gebracht.

U zult misschien vinden dat deze opgave wel erg gemakkelijk is. Laat ik u direct geruststellen: er werd nog meer gevraagd in 1962. Van de goniometrie bijvoorbeeld moest je aardig op de hoogte zijn. Dat kun je zien aan een van de vragen uit dat jaar: Gegeven $\cos x = \frac{3}{5}$; bereken zonder een tafel te gebruiken: $9\tan x + 16\tan\frac{x}{2}$. En ook je formulevaardigheden moesten op peil zijn, anders kwam je niet ver met de vraag: Voor welke waarden van x in het interval $0 \le x \le 2\pi$ is $\sqrt{2\cos x + 1} < \sin x$?

Met de grafische rekenmachine is de laatste opgave natuurlijk makkelijk. Als je tenminste genoegen neemt met benaderende antwoorden. Maar met de hand is het een heel werk dit tot een goed einde te brengen.

Het eindexamen van 1982

We nemen nu een stap van twintig jaar en komen bij het eindexamen vwo van 1982. In die twintig jaar is heel wat gebeurd:

- HBS en Gymnasium zijn als schooltypen verdwenen en vervangen door het vwo.
- De vaste lijst van vakken voor het examen is vervangen door een systeem van vakkenpakketten.
- Het werk van de CMLW heeft in het vwo geleid tot twee wiskundevakken: wiskunde I en wiskunde II.

Wiskunde I wordt voor bijna alle studies geëist. In wiskunde I zit in het examenprogramma geen meetkunde, wel kansrekening en statistiek. Over de invoering van dit vak is naar schatting een kleine twintig jaar gediscussieerd.

Wiskunde II is vooral bedoeld als vooropleiding voor een exacte studie. Onder invloed van moderne wiskundigen als Dieudonné en diens profeet in Nederland Piet Vredenduin is de klassieke meetkunde als context voor het leren wiskundig redeneren vervangen door de lineaire algebra. De leerlingenaantallen die dat vak kiezen zijn klein. In de wandelgangen van de exacte faculteiten is men niet enthousiast voor Wiskunde II. “Ze kunnen beter een extra moderne taal leren” zo wordt gezegd. “Dat beetje lineaire algebra van het vwo leren we ze in twee middagen wel zelf.”

De verzamelingentaal is ingevoerd en de wiskundige smaakmakers gaan ervan uit dat je de kloof tussen school en wetenschap onder andere verkleint door de notaties wat formeler te maken. Aan de examenopgaven is dat goed te zien.

Examen wiskunde I voor het vwo in 1982, 12 mei, 9.00–12.00 uur.
Voor elke $p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ is met domein $\mathbf{R}^+$ gegeven de functie $f_p : x \to 2\ln^2 - 2p\ln x$

a. Onderzoek f_1. Bereken de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f_1. Teken de grafiek van f_1 ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel Oxy.
b. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f_1 en de x-as.
c. De grafiek van de functie f_p snijdt de x-as in de punten A_p en B_p. De raaklijn in A_p en de raaklijn in B_p aan de grafiek van f_p snijden elkaar in het punt C_p. Voor welke p geldt: de x-coördinaat van C_p is kleiner dan 2?

Laten we eens nagaan wat er allemaal moet worden gedaan om de beschikbare punten te kunnen scoren: Vraag a is een standaardvraag. Voor de leerlingen in die tijd een bekende rituele dans. Je moest de nulpunten en het tekenverloop van de functie berekenen, de afgeleide, het tekenverloop daarvan, de uiterste waarden, de asymptoten van de grafiek en als dat allemaal was volbracht, kon je de grafiek tekenen. Die grafiek was de apotheose van de rituele functiedans.

Nu vraag b: Je moet de integraal

$$\int_1^e (2\ln x - 2\ln^2 x)dx$$

opstellen en berekenen. Dat betekent: de nulpunten gebruiken die je bij vraag a hebt gevonden en ook nog inzien dat je $-f_1$ in de integrand moet zetten. Maar als je dat niet had gedaan, merkte je bij het antwoord wel dat er iets mis was gegaan. Om de integraal te berekenen, kon je natuurlijk niet om partiële integratie heen, ook al kende je de primitieve van $\ln x$ uit het hoofd. Ten slotte vraag c: voor de twee raaklijnen vind je $y = -2px + 2p$ en $y = \frac{2px}{e^p} - 2p$. Voor de x-coördinaat van het snijpunt $x = \frac{2e^p}{1+e^p}$. Voor welke waarde van p is die breuk kleiner dan 2?

Wie 'gewoon' schrijft $\frac{2e^p}{1+e^p} < 2$ en (de noemer is steeds positief) vermenigvuldigt met $1 + e^p$ vindt $0 < 2$ en moet vaststellen dat het antwoord moet zijn: "voor elke waarde van p."

Als ik deze twee opgaven met elkaar vergelijk, heb ik de indruk dat de vader die mij nog onlangs zei dat zijn zoon al in de vroege jaren tachtig op het vwo bijna niets meer aan wiskunde had geleerd er goed aan zou doen de eindexamens van enkele decennia nog eens te bekijken.

De opgave van 1982 is duidelijk moeilijker dan die van 1962; al moeten we direct er bij zeggen dat die grotere diepgang wel ten koste was gegaan van de breedte. De goniometrie was verdwenen en ook van stereometrie en analytische meetkunde wisten de vwo-ers in 1982 bijna niets.

De examenkandidaat van 1982 had intussen ook een rekenmachine. Hij kon daarmee logaritmen en sinussen en cosinussen opzoeken en daarmee de gewone bewerkingen uitvoeren, maar geen integralen (numeriek) berekenen. Er werd in 1982 aan handmatige algebraïsche vaardigheden behoorlijk wat geëist; dat kunt u zelf vaststellen.

Vaardigheden als probleemoplosser heb je voor deze opgave eigenlijk niet zo nodig. Als je altijd netjes je werk had gedaan, wist je wat er moest gebeuren. Je kon wel stuklopen op een gebrek aan techniek.

De examenkandidaat van 1962 zou de opgave van 1982 niet hebben kunnen maken; simpelweg omdat de natuurlijke logaritme en het partieel integreren in 1962 nog niet in het programma zaten. Omgekeerd zou de kandidaat van 1982 met de opgave van 1962 geen moeite hebben gehad.

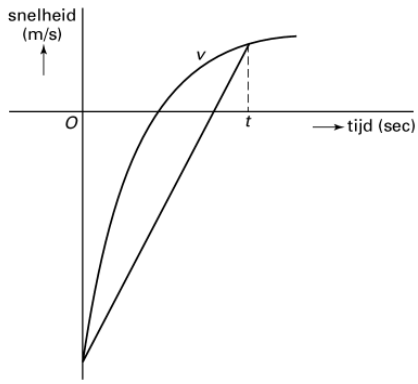
De huidige vwo-leerling beschikt over een *grafische* rekenmachine (GR). Hij zou de vragen a en b van 1982 grotendeels fluitend hebben kunnen oplossen. Alleen met dat buigpunt bij vraag a zou hij moeilijkheden hebben, daarvoor kan hij niet vaardig genoeg met formules overweg. Met vraag c zou niemand uit de voeten kunnen; daar helpt je GR je niet. Met een computerprogramma als VuDif zou je daar wel geholpen zijn. Met de schuifparameter kun je het patroon van grafieken laten bewegen, zodat je ziet dat, hoe je p ook kiest, het snijpunt C altijd links van de lijn $x = 2$ ligt.

Het eindexamen van 2002

We gaan weer twintig jaar verder; naar het examen van 2002.

Eindexamen wiskunde B1,2 vwo 2002-I
Een bal valt van enige hoogte in het water. Vanaf het moment dat de bal het wateroppervlak raakt, wordt hij afgeremd. Door zijn snelheid zal hij nog een stuk onder het wateroppervlak komen. Vervolgens zal de bal weer opstijgen naar het wateroppervlak. Voor de snelheid v, in meters per seconde, van een bepaalde bal die in het water valt, geldt de formule: $v(t) = 2 - 8e^{-2t}$

Hierbij is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de bal in het water komt; v is positief als de bal omhoog gaat. Deze formule geldt alleen zolang de bal onder water is. Ter vereenvoudiging verwaarlozen we de diameter van de bal. In figuur 1 staat de grafiek van v



Figuur 1 De periode dat de bal onder water is

voor de periode dat de bal onder water is.

De gemiddelde versnelling (in m/sec²) van de bal tijdens de eerste t seconden dat hij onder water is, is gelijk aan de helling van het verbindingslijnstuk tussen de punten op de grafiek van v die horen bij de tijdstippen 0 en t. In figuur 1 is dit lijnstuk voor een waarde van t getekend.

– Bereken de gemiddelde versnelling in m/sec² gedurende de eerste 2 seconden. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De bal bereikt het diepste punt na ongeveer 0,7 seconden.

– Bereken het exacte tijdstip waarop de bal op het diepste punt is.

Het aantal meters dat de bal zich op een bepaald tijdstip onder het wateroppervlak bevindt, kun je berekenen door de snelheid te integreren,

– Bereken de grootste diepte die de bal bereikt. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Het eerste wat opvalt, is natuurlijk de hoeveelheid inleidende tekst. Maar nu de wiskunde: Om de eerste vraag te beantwoorden moet je $v(2) - v(0)$ delen door 2. Met je rekenmachine een eenvoudige zaak.

Voor het antwoord op de tweede vraag moet je inzien dat de bal op zijn diepste punt is als v gelijk is aan 0. Ook eenvoudig.

En de derde vraag leidt tot de integraal van 0 naar $\ln 2$ over de snelheidsfunctie. Dat kan lastig zijn om dat in te zien, maar dat word je voorgezegd.

Conclusie: wiskundig een zeer eenvoudige opgave; er kunnen zich alleen interpretatieproblemen voordoen, maar die krijg je cadeau.

De niveauvraag

Het wordt tijd terug te keren naar de vraag van het begin: Is het wiskundige niveau van de vwo-leerlingen in de afgelopen veertig jaar aanwijsbaar gedaald?

In de vwo eindexamens voor wiskunde I of wiskunde B kun je tot 1998 geen aanwijzingen vinden dat het wiskundige niveau van de vragen steeds maar daalt. Wel zie je in de profielexamens tot nu toe het niveau van het gevraagde wiskundige handwerk teruglopen en problemen verschijnen die met het modelleren te maken hebben. Ik kom daar straks op terug.

Van 1968 tot 1998 zijn de programma's minder breed dan in de jaren zestig, maar wat er aan de orde kwam (de analyse, kansrekening, ruimtemeetkunde) is steeds van een behoorlijk niveau gebleven en ook voor de academische wiskundige herkenbaar als wiskunde. Wel zie je dat de opdracht "Bewijs ..." gaandeweg minder in de examens voorkomt. Telde ik tussen 1975 en 1982 op 45 berekenvragen nog 17 bewijsvragen. Tussen 1986 en 1995 waren er op 65 berekenvragen nog maar 13 bewijsvragen.

Rekenmachine

De invloed van de gewone rekenmachine, die sinds circa 1980 beschikbaar is op de examens, is tot aan de profi-examens (de proefexamens van de profielexamens) niet zo groot. De aard van de gestelde vragen is er nauwelijks door beïnvloed. Je kunt een rekenmachine beschouwen als een *black box*. In de afgelopen veertig jaar heb ik leerlingen vaak met black boxes van allerlei soort zien werken. Er is geen principieel verschil tussen het onbegrepen toepassen van de abc-formule of de kettingregel en het klakkeloze gebruik van een rekenmachine. Ook het werken met de logaritmetafel was vaak een onbegrepen kunstje. Noodzakelijke verkortingen in het handelen kunnen er voor zorgen dat wat eerst begrepen is, na enige tijd verwordt tot een onbegrepen handeling. U weet misschien dat Dijksterhuis al in de jaren dertig van de vorige eeuw pleitte voor epistemisch wiskundeonderwijs, waarmee hij bedoelde dat leerlingen wel verkortingen mogen gebruiken, maar steeds in staat moeten zijn op afroep een dergelijke verkorting toe te lichten. Ik denk dat die eis voor grote groepen leerlingen ook toen al onhaalbaar was. De signalen daarvoor kun je in de leraarsbladen van de vorige eeuw op diverse plaatsen vinden.

De Oostenrijkse wiskundige Kutzler [5] vergelijkt hoofdrekenen met wandelen of lopen, rekenen met behulp van pen en papier met fietsen en rekenen met behulp van een rekenmachine met autorijden. Wie $e^{\ln 4}$ intikt op zijn machine is te vergelijken met iemand die naar zijn schuurtje wil gaan met de auto. Nog meer dan nu het geval is, zou in de wiskundeles het gebruik van de rekenmachine specifieker op de situatie moeten worden toegesneden. Niet alleen, zoals nu vaak gebeurt, door bij een opgave te schrijven "zonder rekenmachine", maar ook door de vragen verstandig te kiezen. Zo zou je de opgave: 'Gegeven $\cos x = 0,6$; bereken $\sin x$', moeten laten volgen door de opgave 'Gegeven $\cos x = p$; druk $\sin x$ in p uit'. Bij de eerste vraag kan iemand nog eerst met de rekenmachine x bepalen en daarna $\sin x$. Bij de tweede vraag lukt dat niet meer.

Van geheel andere orde is de introductie van de grafische rekenmachine. Die levert wel een verschuiving op van probleemstellingen. Was in 1982 het tekenen van de grafiek nog de apotheose van de rituele functiedans, nu is de grafiek het uitgangspunt dat gebruikt kan worden om verder de functie te bestuderen.

Wiskunde op het vwo; waarom eigenlijk?

Het antwoord op die vraag verschuift met de tijd. Tussen 1961 en 2002 hebben zich drie omwentelingen voorgedaan: in 1968 kregen we een door *new-math* geïnspireerd programma, in 1985 de HEWET en in 1998/1999 het nieuwe programma van de profielstructuur.

Het programma van 1968 zocht aansluiting bij de ontwikkelingen van de wiskundige wetenschap. Het was de opstellers ervan vooral te doen om de wiskundige correctheid en om het bevorderen van het leren denken van de leerlingen.

HEWET (1985) gaf ons de wiskunde A en wiskunde B. Wiskunde A was bedoeld als voorbereiding voor gammastudies en ter bevordering van de maatschappelijke gecijferdheid. Wiskunde B probeerde meer aan te sluiten bij technische studies. Deze herverkaveling van wiskunde I en wiskunde II was een serieuze poging de schoolprogramma's beter af te stemmen op wat er later mee moet of kan worden gedaan. Door wiskunde A te ontdoen van datgene wat altijd centraal had gestaan in de schoolwiskunde, bewijzen en omgaan met algoritmen, en te richten op modelvorming en gebruik van wiskunde in andere vakken, deed men een serieuze poging de leerlingen een maatschappelijk bruikbaar vak aan te bieden. Alle mooie woorden over de maatschappelijke relevantie van de wiskunde kregen eigenlijk pas in 1985 een eerste echte concretisering. Tot die tijd was de wiskunde in het voortgezet onderwijs het domein van de academische wiskundigen. Het schoolprogramma was vooral bedoeld als voorbereiding op een exacte studie. En wie geen exact vak ging studeren, kon zijn voordeel doen met de zegenende invloed van het exacte denken.

Door de afsplitsing van wiskunde A kon je in wiskunde B grondig werk maken van een goede voorbereiding op exacte studies. De in 1968 binnengehaalde lineaire algebra verdween weer van het toneel en de stereometrie (nu ruimtemeetkunde genoemd) keerde terug. Twee doelen werden genoemd: ruimtelijk inzicht bevorderen en kennis maken met een deductief systeem. Erg veel succes heeft die ruimtemeetkunde niet gehad. En van de kennismaking met een deductief systeem kwam ook lang niet altijd veel terecht.

De profielprogramma's die in 1998 werden ingevoerd, probeerden de in 1985 ingeslagen weg te vervolgen. Er kwamen vier verschillende programma's voor de vier profielen. Een van de ideeën was dat je dan in het profiel Natuur & Techniek ook echt kon voorbereiden op een exacte studie. Dat het daarmee ook niet goed is afgelopen, is de meeste van u bekend. De noeste arbeid van de studiecommissie wiskunde B in de vroege jaren negentig kon niet verhinderen dat de schoolwiskunde steeds verder kwam af te staan van de wiskunde als academische discipline.

Onderwijsdoelen

Denkend over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs is het goed op te merken dat de algemene onderwijsdoelen nu anders zijn dan in 1961 toen ik aan mijn leraarswerk begon. Zeker tot 1968 waren 'kennismaken met je cultuur, vorming' en het 'verkennen van je grenzen' (wat kan ik wel en wat kan ik niet?) geaccepteerde doelstellingen van het onderwijs. Wat je leerde was minder belangrijk dan dat je liet zien dat je kon leren en dat je kon doorzetten. Wiskunde paste uitstekend in die cultuur. Zelfs als er ogenschijnlijk toepassingen aan de orde kwamen, dan speelden die toch eigenlijk alleen maar de rol van uitdaging. Zo citeren Davis en Hersh de econoom John Kennis Galbraith, die over wiskundige modellen in de economie zegt: "[...] al hebben ze geen praktische waarde, ze vervullen een nuttige academische functie. Een van de oudste problemen bij de opleiding economie is hoe je de ongeschikte mensen moet weren. De eis van vaardigheid om met ingewikkelde modellen om te gaan, waaronder die waarvoor wiskundige begaafdheid nodig is, is een buitengewoon nuttig selectiemiddel." [6]

In de laatste decennia is de roep dat onderwijs direct toepasbare en bruikbare kennis moet bieden steeds luider geworden. Het economische nut als de maat van alle dingen is onomstreden. Het spreken over producten in situaties waarin dat vroeger nooit gebeurde (de afgestudeerden van een universiteit, de treinenloop van de NS, een geneeskundige behandeling, een overnachting in een hotel) vinden alleen wereldvreemde onaangepaste oude stakkers nog vreemd. Dat heeft zijn weerslag gehad op de wiskundeprogramma's. Namen we vroeger genoegen met de bewering dat wiskundeonderwijs een grote vormende waarde had zonder dat we de effecten van die vormende waarde concreet konden aangeven, tegenwoordig willen we die vormende waarde aangeduid zien in herkenbare, winstgevende toepassingen. Dat heeft er ook toe geleid dat de nadruk die vroeger al direct vanaf de eerste klas van het Lyceum in de wiskunde werd gelegd op stellingen, definities en bewijzen nu grotendeels verdwenen is en is vervangen door quasi maatschappelijk relevant gereken over gasrekeningen en zichthoeken. De terugkeer van de vlakke euclidische meetkunde als context voor het oefenen van bewijsopgaven is een poging daar weer wat aan te doen, maar dat begint dan pas in de bovenbouw. Voor het ontwikkelen van de gewenste redeneervaardigheden lijkt me dat gevaarlijk laat.

Het is wel frustrerend op te merken dat zeker al sinds 1961 geroepen wordt dat de kloof tussen de schoolwiskunde en de academische wiskunde kleiner moet worden en dat nog onlangs door een oud-medewerker van het Philips Natlab in *Trouw* werd geschreven: "Het probleem is namelijk dat de middelbareschoolwiskunde nauwelijks iets met professionele wiskunde te maken heeft. Wie wiskunde wil studeren en alleen middelbare schoolkennis heeft opgedaan, begint op de universiteit op niveau nul, plus een klein beetje." [7]

Dat we ook in het vwo leerlingen zo lang mogelijk de kans willen geven mee te komen, heeft tot gevolg dat vooral in de onderbouw veel te lang op een te eenvoudig niveau wordt gewerkt, dat er te veel aandacht is voor echte of vermeende toepassingen en dat er te laat aandacht is voor het ontwikkelen van het abstracte denken. Daardoor moet er in de bovenbouw te veel aandacht worden gegeven aan elementaire zaken die al in de onderbouw afgehandeld hadden moeten zijn. Het is mijn stellige overtuiging dat er voldoende leerlingen zijn die al op zeer jeugdige leeftijd met abstracties en wiskundige redeneringen kunnen omgaan en dat deze leerlingen nu ernstig tekort komen. Nu scholen er langzamerhand weer toe overgaan ook in de brugklassen de betere leerlingen bij elkaar in de klas te zetten, zou er voor die leerlingen ook een aparte leerlijn moeten worden ontworpen. Zo zouden die leerlingen de kans krijgen de gewenste redeneer- en formulevaardigheden te ontwikkelen zonder daarbij voor anderen onnodige blokkades op te werpen.

Anderzijds stel ik vast dat er ook beweging zit in het front van de academische wiskunde. Werd vroeger in het universitaire curriculum sterk de nadruk gelegd op het structuurkarakter van de wiskunde, tegenwoordig zijn er ook hoogleraren die verder kijken dan de wiskunde zelf. Onlangs kreeg ik een briefje van Ger Koole (hoogleraar Optimalisatie van bedrijfsprocessen), waaruit ik citeer: "Wat ik *modelleren* zou noemen is te weinig aandachtspunt van wiskundigen en daardoor loopt de communicatie met niet-wiskundigen moeizaam: wiskundigen lossen vaak perfect het verkeerde probleem op. Als het studiehuis ertoe bijdraagt dat de link tussen wiskunde en maatschappij wordt versterkt lijkt me dat een belangrijke stap vooruit, en van groot belang voor de wiskunde. Dat we eventueel in de opleiding wiskunde op een iets lager niveau moeten beginnen moeten we dan maar op de koop toenemen."

Leerlingenaantallen in het vwo

Nog even terug naar het artikel in *Het Parool* en de rede die Leeman in 1961 hield bij de installatie van de CMLW. Hij stelde daarin dat er in 1961 in Nederland circa vijftien wiskundigen per jaar zouden afstuderen. Laat ik een klein sommetje maken: In 1961 had Nederland elf miljoen inwoners. Volgens Douwe Kok (docent aan de lerarenopleiding van de VU) is het percentage leerlingen dat in het algemeen vormend onderwijs een exacte richting kiest sinds 1961 toegenomen van circa 6% naar circa 13%. De bevolking is gegroeid van elf naar zestien miljoen. We kunnen nu dus in Nederland $\frac{13 \times 16}{6 \times 11} \approx 48$ afgestudeerde zuivere wiskundigen per jaar verwachten. Bedenken we daarbij dat we tegenwoordig ook nog studies als informatica en bedrijfswiskunde hebben, dan staat de Nederlandse wiskunde er misschien toch niet zo gek voor.

Noten en referenties

1 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 3.

2 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 7.

3 Installatierede Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 19 juli 1961, p. 10.

4 S.J. Richter, *Eindexamens der gymnasia*, WN 1969, p. 218.

5 Zie op www.kutzler.com het artikel *Algebraic calculators as a pedagogical tool for teaching mathematics*.

6 Zie P.J. Davis en R. Hersh, *Descartes' droom*, Contact, 1987, ISBN 90-254-6734-2, p. 120.

7 Henk Kuiken, 'Wiskunde sterft in Nederland', *Trouw* 19 februari 2003.