Herold Dehling
Mathematik, NA 3/67
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstrasse 150, 44780 Bochum
Duitsland
herold.dehling@ruhr-uni-bochum.de

Jan van Maanen
Initiële Opleidingen en Bètadidaktiek
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
maanen@math.rug.nl

Een plaquette voor Daniel Bernoulli

Kleine Groninger en grote wetenschapper

Op 8 februari 1700 werd in Groningen Daniel Bernoulli geboren. Ter herinnering hieraan werd 300 jaar later op de plaats waar zijn geboortehuis stond een plaquette aangebracht. De onthulling op 15 december 2000 werd vergezeld van een kleine tentoonstelling in de Openbare Bibliotheek waar onder andere de Hydrodynamica van Daniel Bernoulli te zien was. Bij de onthulling belichtten de initiatiefnemers het leven en het werk van Daniel Bernoulli. Dit artikel vormt de neerslag van hun inleidingen.

Daniel Bernoulli dankt zijn faam vooral aan het werk *Hydrodynamica* [1]uit 1738. De discipline hydrodynamica ontleent haar naam aan deze titel. De titelpagina (figuur 2) geeft een beknopt CV van de auteur, dat we hier uit andere bronnen nog iets zullen aanvullen.

De auteur begint met zijn naam "Daniel Bernoulli", en meteen voegt hij toe: "Joh. Fil." (Johannis Filii), de zoon van Johann. Johann Bernoulli en Dorothea Falkner woonden sinds 1695 in de Oude Boteringestraat in Groningen, in een huis dat later huisnummer 16 kreeg en dat in de negentiende eeuw vervangen werd door een nieuw pand. Dit laatste moest rond 1990 plaats maken voor de nieuwbouw van de Openbare Bibliotheek. De plaquette is aangebracht aan de zuidelijke wand van de ingangspartij van de bibliotheek (figuur 5). Johann Bernoulli meldt in zijn autobiografie: "1700. De 29ste januari [volgens de oude tijdrekening], 's avonds om kwart voor acht heeft God ons met een tweede zoon verblijd, die ik de 31ste van diezelfde maand zelf in de Franse kerk ten doop heb gehouden, waarbij hij de naam Daniel heeft gekregen."

Figuur 1 De plaquette

De titelpagina van de *Hydrodynamica* gaat verder: "Professor in de Geneeskunde te Basel". Inderdaad was Daniel vanaf 1732 hoogleraar in de anatomie en plantkunde in Basel, de plaats waar het geslacht Bernoulli zich een eeuw eerder had gevestigd en waar ook Johann Bernoulli in 1667 geboren was. Daniel studeerde in Basel, want in 1705 ging het gezin Bernoulli terug naar Basel. In Groningen waren ze in 1703 verhuisd naar de oostzijde van de Grote Markt. Daar zal Daniel wel met knikkers zijn eerste mechanische experimenten gedaan hebben.

Daniel maakte in zijn leven verschillende grote reizen. De eerste, van Groningen naar Basel, begon wel uitermate spectaculair. Op 18 augustus 1705 vertrekt de karavaan (vader en moeder Bernoulli, vier kinderen, een dienstmeisje en Johann's neef Nikolaus, die een half jaar in Groningen gelogeerd had) per koets naar Harlingen. Zware tegenwind maakt het onmogelijk om op dat moment over de Zuiderzee naar Amsterdam te varen. Daarom gaan ze eerst per koets verder naar Stavoren. Intussen heeft Daniel roodvonk, maar dat belet ze niet om op 21 augustus over te varen naar Enkhuizen, een overtocht die door de storm in plaats van een paar uur de hele dag duurde. De 22ste komen ze te Amsterdam aan. Van de 28 tot 31 augustus verblijven ze in Utrecht, waar de vroedschap Johann in het voorbijgaan tevergeefs een professoraat aanbiedt. Op 3 september bereiken ze Keulen om via Rijn en Main verder te reizen naar Frankfurt. Daar nemen ze op 11 september de koets die ze uit Basel tegemoet gekomen was. Op 13 september komen ze dan eindelijk in Basel aan. Alle kinderen zijn nog in leven hoewel dat voor twee van de vier onderweg bijna misgegaan was. Dit relaas danken we opnieuw aan de autobiografie van Daniels vader.

Post-doc en professor

Daniel studeert medicijnen en wiskunde in Basel, Heidelberg en Straatsburg. Als hij na zijn artsexamen in 1720 tot twee maal toe in Basel wordt afgewezen voor een professoraat besluit hij eerst nog de klassieke grote studiereis te maken, in zijn geval naar Italië. Het plan was dat hij zich in Venetië verder in de medicijnen zou bekwamen, maar Daniel doet liever wiskunde. In Venetië verschijnt ook in

1724 zijn eerste wiskundige publicatie. In 1725 wint hij zijn eerste grote wetenschappelijke prijs, van de Parijse *Académie des Sciences*. Het levert hem het aanbod op van een baan, zeg maar een post-doc positie, in Sint Petersburg.

Op dit punt gaat het CV op de titelpagina weer verder want Daniel voegt aan de melding van zijn medische professoraat in Basel toe:

Voorheen gewoon hoogleraar in de hogere wiskunde aan de keizerlijke Academie van Wetenschappen te Petersburg, nu lid van deze academie en honorair hoogleraar.

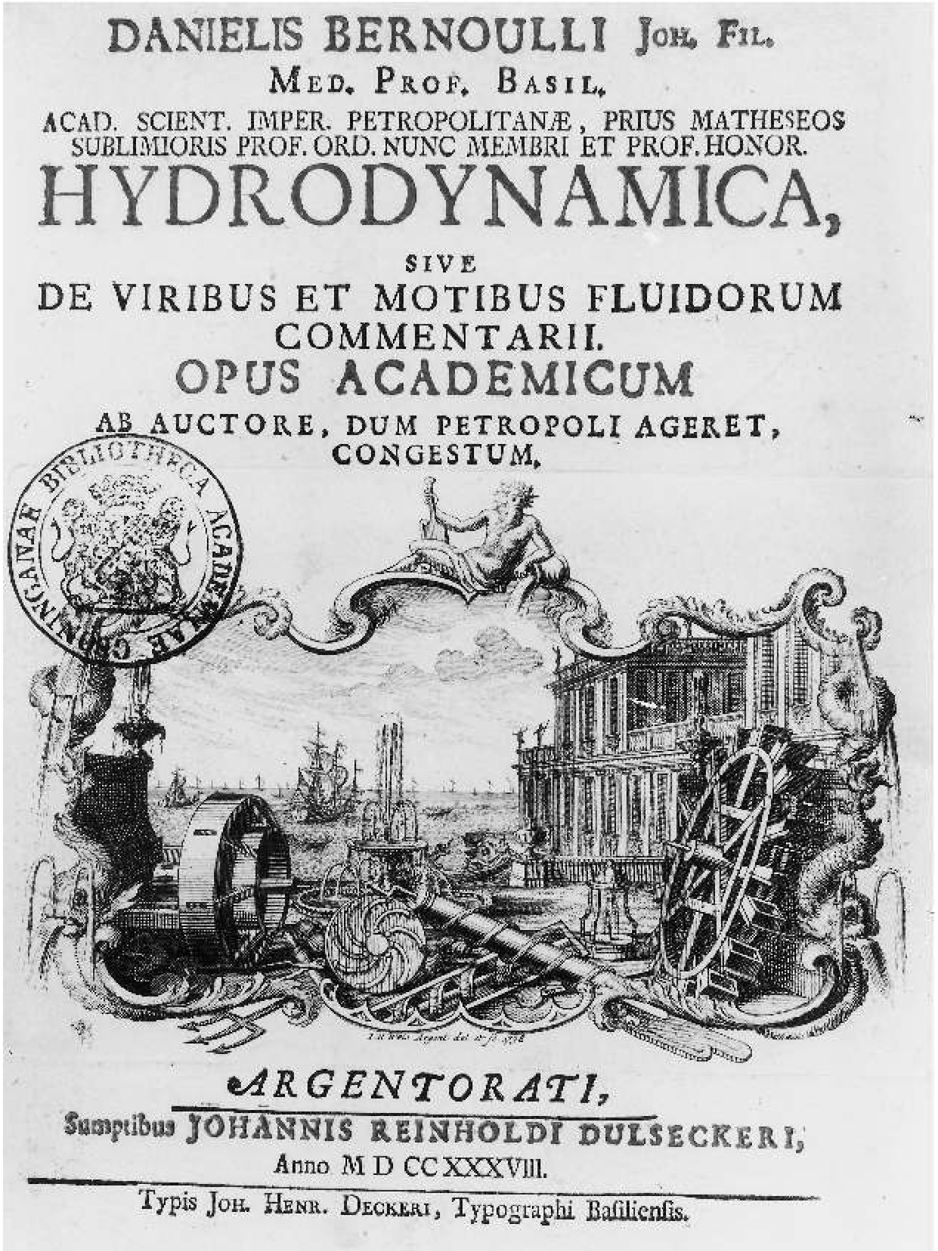
Voor de lezer —ook voor de toenmalige— is de boodschap duidelijk: Daniel is niet zomaar iemand. Hij heeft research-ervaring opgedaan in het buitenland. Als lid van de academie heeft hij een *netwerk*.

Daniel werkt van 1725 tot 1733 in Petersburg. In 1727 haalt hij zijn stad- en studiegenoot Leonhard Euler ook naar Petersburg. Er ontstaat een vruchtbare samenwerking. In Petersburg houdt Daniel zich met talrijke onderwerpen bezig. Een ervan, zijn studie van de ‘Petersburger Paradox’ uit de kansrekening, bespreken we hieronder iets gedetailleerder. Maar vooralsnog laten we ons leiden door de informatie van het CV. Want wat zegt Daniel over de *Hydrodynamica*? Het zijn “notities over de krachten en bewegingen van vloeistoffen”. “Opus Academicum”, voegt hij eraan toe, letterlijk vertaald: een Wetenschappelijke Publicatie. Het is weliswaar een boek, maar de lezer moet het niet opvatten als een vakpublicatie. Dit is wel degelijk wetenschappelijk werk. En verder: dit werk is “samengesteld door de auteur, toen hij nog in Petersburg werkte.”

En daar gebruikt Daniel niet “viveret”: ‘woonde’, of ‘verbleef’. Nee, hij schrijft “ageret”, van het zelfde werkwoord waarvan ons woord ‘actief’ afkomstig is.

Voorwaar, geen low-profile CV. Met deze man dient men rekening te houden.

De titelpagina gaat verder met een artistieke impressie van de hydrodynamische thematiek. De kunstenaar, I.M. Weis uit Straatsburg, heeft duidelijk niet de Rijn afgebeeld, dus zal hij zich wel hebben laten inspireren door krachten en bewegingen van vloeistoffen en door de plaatsnaam Petersburg. Er is zee op de achtergrond, rechts is een soort Hermitage in beeld, en er zijn talrijke vloeistofsymbolen: een turbine, een waterrad, een Archimedische schroef, waterspuwende vissen, een fontein en de drietand van Neptunus. Neptunus zelf troont boven het geheel, en wellicht was er nog een schone waternymf voordat het stempel van de Groningse Universiteitsbibliotheek haar aan het oog onttrok. Om de titelpagina nog even af te maken: de uitgever die het financiële risico nam was Dulsecker in Straatsburg, maar het boek werd in 1738 in Basel gedrukt. Basel was een papiermakers- en drukkersstad bij uitstek, en verder was het natuurlijk praktisch omdat Daniel er woonde.


DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

Figuur 2 De titelpagina van de *Hydrodynamica* (1738)

Hier houdt het titelpagina-CV op. We besluiten deze biografische schets met enkele gegevens uit andere bronnen. Daniel is nog één keer in Groningen terug geweest. De terugreis in 1733 van Petersburg naar Basel ging namelijk via Gdansk, Hamburg, Bremen en Groningen. Vandaar ging hij verder via Amsterdam, Antwerpen en Parijs.

In 1750 stapt Daniel in Basel van de geneeskunde over naar de fysica. Zijn experimentele colleges in het Zeughaus in Basel, naast het huidige hoofdgebouw van de Baselse universiteit, trekken veel hoorders. Hij blijft fysica doceren tot 1776. Dan wordt hij door zijn oomzegger Daniel vervangen, en vervolgens door diens broer Jakob. Daniel blijft tot het laatst helder van geest, en overlijdt op 17 maart 1782.

De wetenschapper

Op dit moment is Daniel Bernoulli het best bekend als de grondvester van de hydrodynamica en degene die als eerste de wet van Bernoulli formuleerde

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.}$$

Deze beschrijft het verband tussen de druk p en de snelheid v in een buis waardoor stationair een vloeistof of gas stroomt met dichtheid ρ. Om verschillende redenen gaan we hier verder niet op in. In de eerste plaats is het resultaat goed bekend en draagt het reeds Bernoulli's naam. En in de tweede plaats wijkt Bernoulli's manier van werken in de hydrodynamica zo sterk af van de huidige aanpak dat ze zonder een uitgebreide inleiding niet te volgen zou zijn.

In plaats daarvan gaan we uitvoeriger in op een stukje kansrekening, en wel op Daniel Bernoulli's benadering van de zogenaamde Petersburger paradox. Deze paradox, die in ieder eerstejaars boek over kansrekening genoemd wordt, dankt zijn naam aan het feit dat Daniels oplossing in de Annalen van de Petersburger Academie van Wetenschappen verscheen. Dit gebeurde in 1738 [2], in hetzelfde jaar dus als de *Hydrodynamica*, maar het stuk dateerde al uit 1730/1731; het tijdschrift had een zeer grote achterstand met publiceren. Het manuscript van de *Hydrodynamica* heeft trouwens ook geruime tijd gelegen; Daniel had het in 1734 afgerond.

Bij de Petersburger paradox gaat het om een gokspel, in principe te spelen in een casino. Je gooit een eerlijke munt net zolang tot voor het eerst 'Kruis' verschijnt, en je krijgt een uitkering die verdubbelt bij iedere keer dat 'Munt' verschijnt. Je krijgt zo de volgende tabel van mogelijke uitkomsten, bijbehorende uitkeringen en kansen:

uitkomst	uitkering	kans
K	1	$\frac{1}{2}$
MK	2	$\frac{1}{4}$
MMK	4	$\frac{1}{8}$
MMMK	8	$\frac{1}{16}$
MMMMK	16	$\frac{1}{32}$
MMMMMK	32	$\frac{1}{64}$
MMMMMMK	64	$\frac{1}{128}$
MMMMMMMK	128	$\frac{1}{256}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

De vraag is nu wat een faire inzet voor zo'n spel zou zijn —of anders, welk bedrag zou een speler bereid zijn om voor deelname aan dit spel te betalen? Zou een speler voor 100 euro aan dit spel mee willen doen

Een halve eeuw voor Bernoulli heeft Christiaan Huygens deze vraag voor algemene kansspelen beantwoord. Hij introduceerde daartoe het begrip *waarde van het spel*; tegenwoordig spreken we over *verwachte waarde* of *verwachtingswaarde*. Voor een spel met uitkeringen $a_1, \ldots, a_K$ en bijbehorende kansen $p_1, \ldots, p_K$ is de verwachte waarde E gedefinieerd als

$$E = p_1 a_1 + \ldots + p_K a_K \,.$$

De verwachte waarde kun je dus opvatten als een gewogen gemiddelde van de mogelijke uitkeringen met de bijbehorende kansen als gewichten. Voor een experiment dat bestaat uit het werpen van een dobbelsteen met als uitkering het aantal geworpen ogen, is de verwachte waarde dus

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$$

Als je dit recept voor het St. Petersburg spel volgt, vind je als verwachte waarde

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty.$$

Daar is niets mis mee. Waarom zou een spel niet voor de afwisseling een oneindige verwachte waarde kunnen hebben. Maar: vind maar eens iemand die bereid is om bijvoorbeeld 100 euro inzet te betalen. De kans om de inzet terug te krijgen is tenslotte maar $1/128$, en dat is niet bijster groot.

Figuur 3 De jonge Daniel Bernoulli

Over deze paradox werd in het begin van de 18de eeuw uitvoerig gediscussieerd. Een van de voorgestelde oplossingen kwam van Cramer, eveneens een Zwitser. Cramer stelde voor om alle uitkomsten met een uitkering hoger dan een bepaald groot bedrag maar te schrappen omdat ieder hoger bedrag voor hem toch even veel waard was —of je nu 50 miljoen of 500 miljoen opstrijkt maakt voor de pret niet erg veel uit. Bernoulli bouwde met zijn benadering hierop voort, maar hij ging veel dieper. Hij voerde voor geld een nutsfunctie u in en berekende vervolgens niet de verwachte uitkering maar het verwachte nut. Het nut zou volgens hem geen lineaire functie van het vermogen moeten zijn, want een extra euro is voor iemand met een vermogen van 100 euro veel meer waard dan voor een miljonair. Daniel Bernoulli postuleerde, preciezer gezegd, dat het toegevoegde nut van een kleine vermogensgroei recht evenredig moest zijn met de groei en omgekeerd evenredig met het initiële vermogen. Dat leverde hem de differentiaalvergelijking

$$u(x + \Delta x) - u(x) = C\frac{\Delta x}{x}$$

met de oplossing

$$u(x) = C \log x.$$

Deze functie heet in deze context vandaag ook wel de nutsfunctie van Bernoulli en is dus genoemd naar Daniel.

Bernoulli definieert nu de waarde van een geluksspel als het bedrag dat de speler een nut geeft dat gelijk is aan het verwachte nut verkregen door deelname aan het spel. Is a het initieel vermogen van de speler, zo luidt de formule voor de waarde v van een geluksspel met mogelijke uitkeringen $a_1, a_2, \ldots$ en bijbehorende kansen $p_1, p_2, \ldots$ dus

$$\sum_k p_k u(a + a_k) = u(a + v).$$

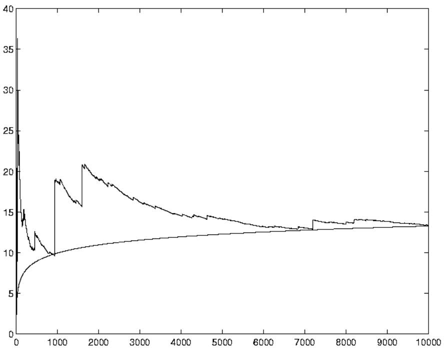
In het geval van Daniel's nutsfunctie $u(x) = \log(x)$ heeft deze vergelijking de expliciete oplossing

$$v = \prod_k (a + a_k)^{p_k} - a.$$

De waarde van een spel is op deze manier afhankelijk van het initieel vermogen van de speler. In het volgend tabel geven we de resultaten voor het St. Petersburg spel:

Vermogen	0	10	100	1000	10000
Waarde	4	5.5	7.9	11	14.2

Daniel Bernoulli gebruikt een aantal verschil-



Figuur 4 Verloop van de gemiddelde uitkering bij 10000 herhalingen van het St. Petersburg spel

lende namen voor de zo verkregen waarde van een spel, onder meer 'valeur' of 'esperance morale' en 'emolumentum' (persoonlijk voordeel).

De Petersburger paradox houdt scherpe denkers tot aan de dag van vandaag bezig. Ongeveer 50 jaar geleden heeft de kansrekenaar William Feller een interessante oplossing voorgesteld. Om deze te begrijpen, gaan we even terug naar het idee om de verwachte waarde als waarde van een spel te nemen. Feller's voorstel maakt gebruik van de wet van grote aantallen, die trouwens voor het eerst geformuleerd en bewezen werd door Daniels oom Jakob Bernoulli. Deze wet leert dat de gemiddelde uitkering na een groot aantal onafhankelijke herhalingen van een spel naar de verwachte waarde convergeert:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to EX.$$

Als je dus voor minder dan EX aan het spel mag deelnemen, maak je op den duur winst, en als de inzet groter is dan EX, maak je verlies. Hoewel je echte uitkering natuurlijk van het toeval afhangt, gaat deze redenering toch vrij snel op omdat de convergentie in de wet van grote aantallen vrij hard gaat.

Hoe zit het nu met het St. Petersburg spel? Ook hier geldt de wet van grote aantallen, ofwel: de gemiddelde uitkering gaat naar oneindig:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \infty\ .$$

Maar deze convergentie is slepend langzaam (zie figuur 4).

Je gemiddelde uitkering gaat wel naar oneindig en dus krijg je een willekeurig hoge inzet op den duur terug —maar daar kun je heel lang op wachten.

Feller heeft dit fenomeen nader onderzocht en uitgevonden dat

$$\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \rightsquigarrow\ {}^2\log n.$$

Daarop baseerde Feller het voorstel om de faire inzet te laten afhangen van het aantal keren dat je aan het spel deelneemt, en deze gelijk te stellen aan ${}^2\log n$:

Herhalingen	10	100	1000	10000
Waarde	3.3	6.6	10	13.3

Bij Feller neemt de waarde van een spel dus toe met het aantal herhalingen. Er is een zeker verband met de waarde volgens Bernoulli omdat een groter initieel vermogen het mogelijk maakt om langer te spelen.

Op dit moment wordt er veel onderzoek gedaan naar het gedrag van stochastische grootheden die zo'n grillig gedrag vertonen als de uitkeringen bij het St. Petersburg spel. Uitkeringen van schadeverzekeringen bijvoorbeeld lijken zich zo te gedragen: veel kleine schadeclaims en dan af en toe plotseling een gigantisch grote claim. Daniel Bernoulli stond met zijn 'nieuwe theorie om het lot te meten' aan de basis van deze ontwikkeling.

Figuur 5 De plaquette in de ingangspartij van de Openbare Bibliotheek te Groningen

Balans

In de naar Daniels vader Johann genoemde Bernoulli-lezing voor het jaar 2000 [3]maakt Grattan-Guiness de balans op van Daniels werk. Hij constateert dat Daniel iets in de schaduw is gebleven van zijn vader Johann en zijn oom Jakob. Daniel werkte niet automatisch in de centrale onderzoeksgebieden van zijn tijd. Hij koos liever wat excentrischer thema's. Zijn studie van de Petersburger paradox getuigt hier ook van. Anderzijds bereikte hij met de thema's die hij bewerkte opmerkelijke resultaten. Vaak was hij zijn tijd ver vooruit. Wie de Groningse Openbare Bibliotheek bezoekt kan daar dankzij de plaquette nu even bij stilstaan.

Referenties

1 Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Straatsburg: Dulsecker 1738.

2 Daniel Bernoulli, 'Specimen theoriae novae de mensura sortis', *Commentarii Acad. Petrop.* 5, p. 1730–31 (1738), p. 175–192; opnieuw afgedrukt in *Die Werke von Daniel Bernoulli* Band 2, Basel etc.: Birkhäuser 1982.

3 Grattan-Guiness, I., 'Daniel Bernoulli and the varieties of mechanics in the 18th century', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1 nr. 3 (2000), p. 242–249.