Wouter Waalewijn
De Roef 4
3904 PC Veenendaal
w.waalewijn@students.math.uu.nl

Schuifpuzzels

In 1870 was een groot deel van de Verenigde Staten en Europa in de ban van de 15-puzzel. Deze schuifpuzzel was bedacht door de beroemde puzzelmaker Sam Loyd, die duizend dollar uitloofde voor de eerste geldige oplossing. Dat dit bedrag nooit opgeëist is, ondanks het feit dat duizenden mensen beweren de puzzel te hebben opgelost, heeft een eenvoudige reden: de puzzel is niet oplosbaar. In dit artikel wordt eerst kort ingegaan op de geschiedenis van de 15-puzzel, waarna een criterium volgt voor de oplosbaarheid van schuifpuzzels van willekeurige afmetingen. Wouter Waalewijn is derdejaars student wiskunde en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht.

Aangezien de 15-puzzel een schuifpuzzel is, zullen we eerst een korte beschrijving geven van schuifpuzzels in het algemeen, die later van pas zal komen. Een schuifpuzzel bestaat uit een rechthoek van vakjes, met op alle vakjes op één na een verplaatsbaar (genummerd) blokje. Zie figuur 1 voor een voorbeeld. Het doel is om vanuit een gegeven begintoestand door een reeks van zetten in de gevraagde eindtoestand te komen. Een zet is het verschuiven van één blokje.

Sam Loyds 15-puzzel is een schuifpuzzel van vier bij vier vakjes, die begint in

Figuur 1 De uitgangspositie van de 15-puzzel

toestand afgebeeld in figuur 1. De bedoeling is de blokjes 14 en 15 te verwisselen terwijl de andere blokjes in de eindtoestand op dezelfde plaats zitten als in de begintoestand. Zoals gezegd heeft deze puzzel tot de nodige hoofdbrekens geleid en er doen hier dan ook een flink aantal verhalen over de ronde. Zo zouden er winkeliers zijn die hun winkels niet openden en machinisten die met hun treinen stations voorbij raasden. Een beroemde redacteur uit Baltimore vertelt hoe hij ging lunchen en pas ver na middernacht door zijn staf ontdekt werd, terwijl hij stukjes taart rondschoof over zijn bord. Opmerkelijk (en tevens uitgekookt) is dat Sam Loyd wist dat zijn puzzel niet oplosbaar is, waardoor hij zich geen zorgen hoefde te maken over zijn duizend dollar.

Deze puzzel heeft ook tot een aanzienlijk aantal wiskundige publicaties geleid, waarvan de eerste paar in 1879 werden uitgebracht door W.W. Johnson en W.E. Story. Terwijl W.W. Johnson aantoont dat de 15-puzzel niet oplosbaar is, geeft W.E. Story een criterium voor de oplosbaarheid van vier bij vier schuifpuzzels. Het bewijs van dit criterium is echter in de meeste artikelen onnodig ingewikkeld en beperkt zich tot vier bij vier schuifpuzzels. Het in dit artikel gepresenteerde bewijs voor het criterium is daarentegen kort en gaat uit van een schuifpuzzel met willekeurige afmetingen. Voor een meer concreet bewijs voor een vier bij vier schuifpuzzel verwijzen we naar een artikel van A.F. Archer [1].

Een criterium voor oplosbaarheid

We bekijken een schuifpuzzel van m bij n vakjes. Een zet respectievelijk serie van zetten beschrijven we met een permutatie σ van $m \cdot n$ elementen, waarbij $\sigma(a) = b$ betekent dat het blokje in vakje a naar vakje b wordt verplaatst. Op deze manier beschrijven we de toestand van de schuifpuzzel na i zetten met een permutatie σ_i. De plaats van het lege vakje na i zetten noteren we met de coördinaten (x_i, y_i). We beschrijven de gezochte eindtoestand met een permutatie σ', en de bijbehorende plaats van het lege vakje met coördinaten (x', y'). Met andere woorden: de schuifpuzzel is oplosbaar als hij in de toestand (σ', x', y') kan worden gebracht.

Iedere permutatie is op te bouwen uit paarwisselingen en dit kan in het algemeen op meerdere manieren. Voor elk van deze manieren is echter de pariteit (het even of oneven zijn) van het aantal paarwisselingen hetzelfde. Dit wordt de pariteit van de permutatie genoemd. Om notatie te vereenvoudigen definiëren we een functie p die aan een permutatie zijn pariteit toekent, en een functie ρ die aan een geheel getal zijn pariteit toekent. Deze functies nemen de waarde 0 voor even en 1 voor oneven permutaties/getallen aan.

We zullen nu aantonen dat als $m > 2$ en $n > 2$, de schuifpuzzel oplosbaar is dan en slechts dan als $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$. Uit $x_0 + y_0 = x' + y' = 8$ en $\sigma' = (14 \quad 15)$ volgt dan onmiddellijk dat de 15-puzzel niet oplosbaar is, aangezien $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = 1 \neq 0 = \rho(x_0 + y_0)$. Voor de overzichtelijkheid hebben we het bewijs opgeknipt in twee lemma's en een stelling.

Lemma 1. *$\rho(x_i + y_i + p(\sigma_i))$ is invariant.*

Bewijs. De enige mogelijke zetten zijn het verschuiven van een blokje, in een vakje dat aan het lege vakje grenst, naar het lege vakje. Maar dan is $\sigma_{i+1} = (ab)\sigma_i$, dus $p(\sigma_{i+1}) = 1 - p(\sigma_i)$. Verder is $x_{i+1} + y_{i+1} = x_i + y_i \pm 1$. Optellen geeft onmiddellijk dat

$$x_{i+1} + y_{i+1} + p(\sigma_{i+1}) = x_i + y_i \pm 1 + 1 - p(\sigma_i)\,.$$

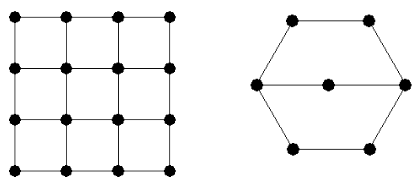
Hieruit volgt dan dat

$$\rho(x_{i+1} + y_{i+1} + p(\sigma_{i+1})) = \rho(x_i + y_i + p(\sigma_i))\,,$$

wat de gestelde invariantie aantoont. □

Lemma 2. *Als $m > 2$ en $n > 2$, dan zijn iedere drie blokjes verwisselbaar.*

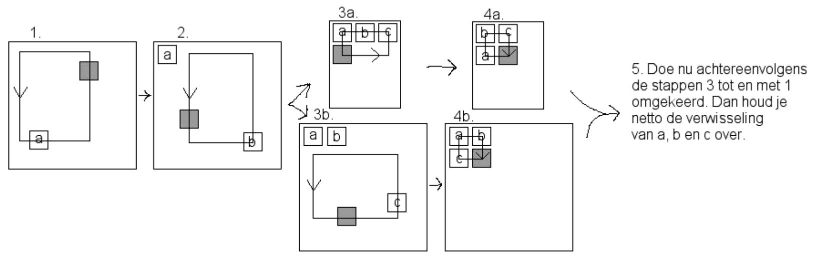
Bewijs. Het bewijs hiervan wordt gegeven door de procedure in figuur 3. Hierin zijn a, b en c de te verwisselen blokjes, en hebben we het lege vakje met grijs aangegeven. Er bestaat een soortgelijke procedure voor $m = 2$ of $n = 2$; hier zullen we verder niet op ingaan. □



Figuur 2 Links: De graaf van de 15-puzzel, rechts: Een geval apart

Stelling. *Als $m > 2$ en $n > 2$, dan is de schuifpuzzel oplosbaar dan en slechts dan als $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$.*

Bewijs. Stel dat de puzzel oplosbaar is, dan is er een reeks van zetten zodat voor een zekere k, $\sigma' = \sigma_k$ en $(x', y') = (x_k, y_k)$. De gestelde gelijkheid volgt dan onmiddellijk uit lemma 1; dit toont de implicatie aan.
Veronderstel nu dat $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x_0 + y_0)$. Eerst verschuiven we in k zetten het lege vakje naar (x', y'). Uit lemma 1 volgt dan dat $\rho(x' + y' + p(\sigma_k)) = \rho(x_0 + y_0)$. Samen met onze aanname leidt dit tot $\rho(x' + y' + p(\sigma')) = \rho(x' + y' + p(\sigma_k))$. Dus $p(\sigma') = p(\sigma_k)$. Hieruit volgt dat $p(\sigma'\sigma_k^{-1}) = 0$. Verder houdt $\sigma'\sigma_k^{-1}$ het lege vakje op zijn plaats.
We kunnen hem dus zien als een element van A_{mn-1}, de deelgroep van even permutaties van $mn - 1$ elementen. Omdat de even permutaties voortgebracht worden door 3-cykels en een 3-cykel overeenkomen met het verwisselen van drie blokjes, volgt uit lemma 2 dat ieder element van A_{mn-1} dus in het bijzonder $\sigma'\sigma_k^{-1}$ verkregen kan worden door verschuivingen. Op grond hiervan concluderen we dat de puzzel oplosbaar is, waarmee de omgekeerde implicatie aangetoond is. □



Figuur 3 De procedure voor het verwisselen van drie blokjes. 1) Verplaats het eerste blokje (a) naar de linkerbovenhoek. 2) Plaats het tweede blokje (b) naast het eerste. 3a) Als het derde blokje (c) naast het tweede zit, plaats het lege vakje dan onder het eerste. Verschuif vervolgens de bovenste twee rijen zodat de drie blokjes en het lege vakje allen in de linkerbovenhoek zitten. 3b) Als het derde blokje ergens anders zit, plaats het dan onder het eerste blokje en plaats het lege vakje daar weer naast. 4a/b) schuif de drie blokjes cyclisch een plaats op. 5) Doe de stappen 3 tot en met 1 omgekeerd. Het resultaat is de verwisseling van de drie blokjes.

Zoals we reeds gezien hebben, volgt uit het bovenstaande criterium dat de 15-puzzel niet oplosbaar is.

Generalisatie van de schuifpuzzel

We zullen nu op een interessante generalisatie van de schuifpuzzel ingaan. Als eerste zullen we kort de nodige begrippen uit de grafentheorie bespreken. Een enkelvoudige graaf $G = (V, E)$ bestaat uit een verzameling punten V en lijnen $E \subseteq \{\{a, b\} | a, b \in V, a \neq b\}$. We zeggen dat de graaf G eindig is als V eindig is. Een pad met beginpunt v_1 en eindpunt v_{n+1} is een rij $(v_1, e_1, v_2, \ldots, e_n, v_{n+1})$ waarvoor $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$. Als er tussen ieder tweetal punten een pad bestaat noemen we de graaf samenhangend. Een graaf is bipartiet als je zijn punten in twee disjuncte verzamelingen kunt verdelen zodat er geen lijnen zijn tussen punten uit dezelfde verzameling, zo is bijvoorbeeld de graaf links in figuur 2 bipartiet. Met behulp van de bovenstaande begrippen zijn we in staat deze generalisatie van schuifpuzzels te formuleren. Neem een enkelvoudige graaf G. Door de punten van G als vakjes te zien, en vakjes aangrenzend te nemen als de bijbehorende punten aangrenzend zijn, krijgen we een gegeneraliseerde schuifpuzzel. Zo wordt bijvoorbeeld de graaf corresponderend met de 15-puzzel gegeven links in figuur 2.

Voor deze generalisatie van de schuifpuzzel kunnen we ons afvragen of, gegeven een beginpositie, een bepaalde eindpositie bereikbaar is. Er blijkt hier een verrassend eenvoudig antwoord op te zijn. Het bewijs hiervan maakt gebruik van geavanceerde grafentheorie. R.M. Wilson [3] laat zien dat als G een eindige, samenhangende, enkelvoudige graaf is die niet gelijk is aan een polygoon of de graaf rechts in figuur 2, dan kunnen we iedere eindpositie bereiken, tenzij de graaf bipartiet is. In dat geval kunnen we alleen alle even permutaties maken. De theorie van de 15-puzzel en algemene schuifpuzzels kan hier uit worden afgeleid.

Referenties

1 A.F. Archer, *A modern treatment of the 15 puzzel*, Amer. Math. Monthly 106 (1999), no. 9, p. 793–799

2 R.M. Wilson, *Graph puzzles, Homotopy and the Alternating Group*, J. Combinatorial Theory, Ser. B 16 (1974), p. 86–96