# Problemen/UWC

## Universitaire Wiskunde Competitie

Met ingang van het dit jaar zijn de Universitaire Wiskunde Competitie en de problemenrubriek samengevoegd. De rubriek zal steeds drie problemen bevatten waar studenten op de gebruikelijke manier punten mee kunnen verdienen. De ladderstand is gewoon naar het nieuwe jaar getransporteerd. Niet-studenten worden uitgedaagd om *hors-concours* hun oplossingen in te zenden.
De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

**Opgave A**
For $n \geq 1$ let $r_n = 3^n + 5$. Prove that for every $k \geq 1$ there exists an $n \geq 1$ such that $2^k$ divides $r_n$.

**Opgave B**
Prove that the function

$$f(x) = \sqrt{1+x} \cdot \ln\left(1 + \frac{1+\sqrt{1+2x}}{1+x}\right)$$

is increasing on the interval $[0, \infty)$.

**Opgave C**
For which $n \in \mathbf{N}$ does there exist an enumeration $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \ldots$ of $\mathbf{Q}^n$ such that the Euclidean distance between consecutive points satisfies $\|\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k\| = 1$ for all $k \geq 1$?

### Oplossingen van de Universitaire Wiskunde Competitie editie 2002/4

We ontvingen 5 inzendingen.

**Opgave 2002/4-A**
In het bos staat een aantrekkelijke paddestoel die echter zo giftig is dat een eekhoorntje er van dood gaat als het er meer dan de helft van opeet. Eekhoorntje 1 snoept toch van de paddestoel en even later doet eekhoorntje 2 hetzelfde. We hebben niet gezien hoeveel ze aten, maar de volgende dag zien we ze vrolijk door het bos huppelen. Hoeveel van de paddestoel verwachten we nog aan te treffen?

**Oplossing** Uiteraard was het de bedoeling om zelf de impliciete aanname te verwoorden, namelijk dat het deel van de paddestoel dat de eekhoorns nuttigen uniform verdeeld is over het op dat moment beschikbare deel van de paddestoel.
Als kansruimte nemen we $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 1\}$, waarbij $x$ en $y$ het deel van de paddestoel aangeven dat door de eerste en tweede eekhoorn wordt opgegeten. De uniforme verdeeldheidsaanname vertaalt zich in de keuze van de kansmaat $P$ met dichtheid $f(x,y) = 1/(1-x)$ op $\Omega$. De gebeurtenis dat beide eekhoorns overleven correspondeert met de deelverzameling $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2}\}$ van $\Omega$. We berekenen

$$P(A) = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \ln 2.$$

Het resterende deel $1 - x - y$, gegeven gebeurtenis $A$, is dan

$$\frac{1}{P(A)} \int_A (1-x-y) f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{4} \simeq 0.471347\ldots.$$

*Redactie: Robbert Fokkink en Jan van Neerven*
*Problemen / Universitaire Wiskunde Competitie*
*Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse*
*Technische Universiteit Delft*
*Postbus 5031, 2600 GA Delft*
*r.j.fokkink@its.tudelft.nl*
*j.vanneerven@its.tudelft.nl*

# Oplossingen

**Opgave 2002/4-B**
Bepaal $\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\cos k$ en $\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\cos k$.

**Oplossing** Deze opgave werd door alle inzenders correct opgelost, maar was door een typfout eenvoudiger dan de bedoelde opgave, het bepalen van $\liminf\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos k$ en $\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos k$. Ter lering en vermaak het antwoord. Schrijven we

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = -\frac{1}{2}+\frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x},$$

dan geldt, met enig rekenwerk,

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\sin x}\cdot\cos((2n+\frac{1}{2})x).$$

Voor $0<x<\pi$ volgt hieruit

$$L^-(x) := \liminf_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx \geq -\frac{1}{2}-\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\sin x}$$

en

$$L^+(x) := \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\cos kx \leq -\frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\sin x}.$$

In het bijzonder zijn $L^-(x)$ en $L^+(x)$ beide eindig. Wegens de irrationaliteit van $\pi$ geldt

$$\liminf_{n\to\infty}\cos(2n+\frac{1}{2}) = -1, \quad \limsup_{n\to\infty}\cos((2n+\frac{1}{2}) = 1,$$

zodat

$$L^-(1) = -\frac{1}{2}-\frac{\sin(\frac{1}{2})}{\sin 1}\simeq -1.069746\ldots \quad \text{en} \quad L^+(1) = -\frac{1}{2}+\frac{\sin(\frac{1}{2})}{\sin 1}\simeq 0.069746\ldots$$

**Opgave 2002/4-C**
Een *harmonische graaf* is een samenhangende, eindige graaf zonder lussen en met enkelvoudige takken, waarbij aan iedere knoop $v$ een natuurlijk getal $n(v)$ is toegewezen zodat

$$2n(v) = \sum_{w} n(w)$$

voor alle knopen $v$, waarbij de som genomen wordt over alle knopen $w$ die verbonden zijn met $v$. Geef alle harmonische grafen die $1-2-3$ als deelgraaf bevatten.

**Oplossing** We geven de oplossing van Filip De Smet. Uitgaande van de deelgraaf $1-2-3$ proberen we verder te bouwen. In de graaf kunnen geen nullen voorkomen; wegens de voorwaarde uit de opgave zou de graaf dan uit enkel nullen bestaan, aangezien alle nullen enkel met andere nullen kunnen verbonden worden. Daardoor kunnen aan de 1 en de 2 geen verdere vertakkingen meer voorkomen.
We proberen nu eerst verder te bouwen vanuit een deelgraaf van de vorm $1-2-\ldots-(k-1)-k$ met $k\geq 3$. Alleen aan de $k$ komen nog verdere vertakkingen. De som van de waarden, behorend bij deze knopen, is dan $2k-(k-1)=k+1$, terwijl elk van deze waarden groter dan of gelijk moet zijn aan $\frac{k}{2}$. Er kunnen dus hooguit twee vertakkingen zijn (wegens $k\geq 3$ krijgen we voor drie takken een som die groter is dan $k+1$). We kunnen de deelgraaf steeds verder voortzetten tot een deelgraaf van dezelfde vorm met één knoop die dan de waarde $k+1$ krijgt.
We bekijken nu de mogelijkheden tot vertakking met twee knopen. Is $k$ even, met $k=2l$, dan zou een opsplitsing in twee takken leiden tot waarden $l$ en $l+1$. De tak met $l$ stopt dan, terwijl de tak met $l+1$ nog extra vertakkingen moet krijgen met als som 2. Nu is

$k \geq 3$, dus $l \geq 2$ en dus $l+1 \geq 3$, zodat twee vertakkingen met waarden 1 niet mogelijk zijn. Eén vertakking met waarde 2 kan alleen indien $l+1 \leq 4$, zodat er slechts twee mogelijke waarden zijn voor $l$, te weten $l = 2$ en $l = 3$, corresponderend met $k = 4$ en $k = 6$. Beide mogelijkheden kunnen optreden. Het is gemakkelijk te controleren dat er voor elke mogelijkheid slechts één exemplaar is, namelijk

$$\text{1–2–3–4}\begin{array}{l} \diagup\ \text{3–2–1} \\ \diagdown\ \text{2} \end{array} \quad \text{en} \quad \text{1–2–3–4–5–6}\begin{array}{l} \diagup\ \text{4–2} \\ \diagdown\ \text{3} \end{array}$$

Stel nu dat $k$ oneven is, met $k = 2l+1$. De twee vertakkingen hebben dan elk de waarde $l+1$ en moeten elk nog verbonden worden met een knoop met waarde 1. Dit kan enkel als $l \leq 1$, zodat, samen met de voorwaarde $k \geq 3$ er slechts één mogelijkheid meer overblijft, namelijk

$$\text{1–2–3}\begin{array}{l} \diagup\ \text{2–1} \\ \diagdown\ \text{2–1} \end{array}$$

**Uitslag Editie 2002/4**

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

| | *Naam* | A | B | C | *Totaal* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Team Frobenius (Utrecht) | 9 | 7 | 9 | 100 |
| 2. | Jan Maas (Delft) | 8 | 8 | 8 | 96 |
| 3. | Filip De Smet (Gent) | 2 | 7 | 10 | 84 |

**Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie**

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

| | *Naam* | *Punten* |
|---|---|---|
| 1. | Jan Maas | 248 |
| 2. | Team Hendrik Hubrechts e.a. | 238 |
| 3. | Mark Veraar | 208 |
| 4. | Team Filip Cools e.a. | 199 |
| 5. | Tom Claeys | 138 |

**Reglement**

De Universitaire Wiskunde Competitie is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade.De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl /uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Er worden drie editieprijzen toegekend, van 100, 50 en 25 euro. De puntentotalen van winnaars tellen voor 0, 50 en 75 procent mee in de laddercompetitie. De aanvoerder van de ladder ontvangt een prijs van 100 euro en begint daarna weer onderaan. Daarnaast wordt twee maal per jaar een ster-opgave aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 euro toegekend.

Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2003. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.