

## Rainer Kaenders

Instituut voor Leraar en School  
Katholieke Universiteit Nijmegen  
Postbus 9103, 6500 HD Nijmegen  
R.Kaenders@ils.kun.nl

### Onderwijs

# Verum, pulchrum, bonum

**Februari 2003 is in Nijmegen het colloquium met de lange naam 'Waarmee ontvlammen wij het wiskundige vuur bij de komende generatie' van start gegaan. Wiskundigen uit Nederland en Duitsland en met gevarieerde professionele achtergrond denken na over de problemen van het wiskundeonderwijs. Het colloquium wordt georganiseerd door de vakdidactici Lodewijk van Schalkwijk en Rainer Kaenders. Volgens Kaenders, die Bert Zwaeneveld opvolgt als redacteur van dit blad, worden wiskundig-didactische problemen in de huidige schoolwiskunde 'opgelost' door de eenvoudige uit de weg te gaan. De centrale wiskundige begrippen komen óf niet meer aan de orde óf zijn nauwelijks nog te herkennen. Kaenders analyseert en doet suggesties hoe het anders kan.**

Uit de jaarlijkse studentenaantallen voor wiskunde is af te lezen hoeveel eindexamenleerlingen een positief antwoord geven op de vraag: 'Werd jij door het wiskundeonderwijs op de middelbare school dermate enthousiast gemaakt voor het vak wiskunde dat jij ervoor kiest om een deel van je leven aan dit vak te besteden?' Er zijn nauwelijks leerlingen meer die hier een positief antwoord op geven. De voorbereiding op een mogelijke studie wiskunde behoort niet meer tot de doelen van het wiskundeonderwijs. Wat is er eigenlijk op tegen als bijvoorbeeld de leraar Frans, de lera-

res economie, de gymleraar of de leraren in CKV (Culturele en Kunstzinnige vormgeving) en ANW (Algemene Natuurwetenschap) eveneens proberen onze leerlingen enthousiast te maken voor zijn/haar vakgebied? Is het niet zelfs een indicatie van levend en enthousiast onderwijs in een vak dat er leerlingen zijn die zich er verder in willen bekwamen? Volgens mijn visie op vitaal onderwijs gaat het pas echt goed met het Nederlandse wiskundeonderwijs op havo-wo als enkele mensen door dit onderwijs de wiskunde een plaats in hun leven kunnen geven, want anders is de wiskunde geen vruchtbaar deel van onze cultuur meer. "Ja, maar niet iedere leerling op de middelbare school gaat wiskunde studeren," hoor ik vaak zeggen. En inderdaad, dit is niet ons probleem, nee. Als leraar en mentor van heel verschillende soorten klassen weet ik heel goed, dat het reken- en wiskundeonderwijs naast deze belangrijke taak van wiskundige cultuuroverdracht nog vele andere even belangrijke taken heeft.

Tot nu toe zullen de meesten het wel met mij eens zijn. In het Nieuw Archief is dit preken voor eigen parochie. Maar zodra het gaat om de oorzaken voor deze misère, zijn de meningen zeer verdeeld. Steeds meer wiskundigen proberen oprecht en met respect voor leraren te begrijpen wat er gebeurt. Maar af en toe is de kritiek vanuit de wiskundige gemeenschap ook erg summier: "te wei-

nig uitdagend", "te simplistisch". Schoolboeken worden alleen oppervlakkig bekeken en de nodige inbreng in de onderwijspolitiek is zwak. Men richt zich vaak uitsluitend op de eindexamens vwo B1,2, want dan hoeft men niet zijn handen smerig te maken aan de vele triviale problemen van het onderwijs op de vele verschillende scholen.

Ik wil hier een — wellicht provocerende — beschrijving van de inhoudelijke problemen geven — en dus een knuppel in het hoenderhok gooien. Dit doe ik vanuit mijn eigen optiek als leraar en vakdidacticus.

#### Antididactische omissie

In de jaren zeventig beschreef Freudenthal een toenmalig probleem in het wiskundeonderwijs met de beroemde term *antididactische inversie*, waarmee hij het geloof in axiomatic als heersend principe voor de didactiek van wiskunde bekritiseerde. Tevens benadrukte hij het belang van de omgang met *didactische inversie*: wiskunde ontstaat in een andere volgorde dan waarin zij wordt gepresenteerd [5].

"Le secret d'être ennuyeux c'est de dire tout." "Het geheim om saai te zijn bestaat erin alles te vertellen." wist al Voltaire. Het weglaten van details, achtergronden, opmerkingen, enzovoorts omwille van een goede dosering behoort vanouds tot het ambacht van leraren. In het begin bijkomstigheden weglaten

kan helpen bij het omgaan met didactische problemen: *didactische omissie*. Maar zodra didactische problemen worden *opgelost* door ze eenvoudig weg te laten en simpelweg te ontkennen, kun je spreken van *antididactische omissie*. In bijna alle tegenwoordig gebruikte schoolboeken gebeurt dat met centrale wiskundige concepten. Voorbeelden hiervan zijn: getalbegrip, deelbaarheid, priemgetallen, rekenen met breuken, incommensurabiliteit en irrationaliteit, reële getallen, bijna alle infinitesimale concepten, oneindig, serieuze goniometrie, de meest elementaire taal van de verzamelingenleer, eenvoudige beweringslogica, en echte toepassingen (zonder voorzeggen van de oplossing). Overigens — om geen misverstanden te laten ontstaan, pleit ik er niet voor om het onderwijs veel formeler en axiomatischer aan te pakken, noch heb ik voor ogen alle bovengenoemde thematieken uitputtend te behandelen. Maar verschilden in de jaren zeventig de didactici nog van mening over de manier waarop je met deze problemen om kunt gaan, nu worden zij als problemen afgeschafte. Prof. Dr. A. van Streun, hoogleraar bètadidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen en medeauteur van de schoolboekserie *Moderne Wiskunde*, Wolters Noordhoff, licht in [9] (zie ook [10]) deze moderne didactische aanpak toe: “Het algebraïsch rekenen, dat voor kort zo'n grote plaats in het wiskundeonderwijs innam, kan steeds meer worden overgelaten aan software. Zoals cijfervaardigheid (bijvoorbeeld staartdelingen) als leerdoel op de basisschool is verdrongen door het handig rekenen met een rekenmachine, kan nu ook het wiskundig rekenen worden uitbesteed aan apparatuur. (Zoals bekend probeert in California een monsterverbond van reactionaire politici en conservatieve wiskundigen met een ‘back to basics’ leerplan die ontwikkeling terug te draaien. Weg met de calculators en computers.)”

Voordat ik voor reactionair word uitgemakkt: bij het schriftelijk worteltrekken kan ik mij hier nog iets bij voorstellen. Maar met de staartdeling ligt dat wel anders: die is essentieel voor een goed getalbegrip (voorstellingen van een getal als decimaal getal en als breuk, irrationale getallen als getallen met een niet-periodieke decimale voorstelling). En ook maak je kennis met het ladenprincipe en is het bruikbaar voor toepassing op veeltermen, bepalen van asymptoten enzovoorts. Bij consequente antididactische omissie daarentegen is de staartdeling inderdaad overbodig. En nog verschrikkelijker is dat de bovengenoemde argumenten ook van

toepassing zijn op andere onderwerpen zoals het rekenen met breuken en wortels. En ook hier slaat inmiddels de antididactische omissie in de praktijk toe.

Het getalbegrip is gereduceerd tot dat wat je op je rekenmachine ziet: *kommagetallen* — volgens Tony Gardiner een manier om alle getallen even saai te maken. De meeste toepassingen zijn oneerlijk want de echte toepassingen zijn gauw te moeilijk. Toekomstige natuurkundigen, ingenieurs of andere bèta's ontstaan net zo min door antididactische omissie.

Antididactische omissie wrekt zich veel eerder dan haar voorstanders lief is. Het rekenen met breuken en wortels behoort tot één van de grootste problemen in de hogere klassen. Zonder enig getalbegrip is ook geen serieuze analyse mogelijk. Dus berust ook het hele curriculum in de analyse inmiddels op het *handig rekenen met een rekenmachine* en wordt *uitbesteed aan apparatuur*. En net zo min als het de Grieken is gelukt incommensurabiliteit in de meetkunde te ontkennen, lukt dat bij de meetkunde op de middelbare school. Bijvoorbeeld bij de definitie van de oppervlakte van een rechthoek, bij de gulden snede en op vele andere plaatsen steekt zij de kop weer op.

Leraren werken veel en hard. De didactische ontwikkelingen krijgen zij deels over zich heen. Commerciële schoolboekseries beloven verlichting van de werkdruk door veel ondersteunend materiaal aan te bieden, zoals proefwerken, computerprogramma's, plannings, onderzoeksopdrachten, scholingen, enzovoorts. Hierdoor en door hun integrale opbouw vreten de schoolboeken zich diep in de schoolorganisatie in. Inhoudelijk bepalen zij de gang van zaken, de leraar organiseert alleen. Een aantal leraren probeert zich hiertegen te verzetten, maar wordt hierin constant belemmerd door een strak keurslijf van PTA's (een door de inspectie geëist plan voor toetsing en afsluiting: meestal bestaand uit nummers van hoofdstukken van schoolboeken) en door eindexamenprogramma's, die alle extra inspanningen ontmoedigen.

Er zijn ongetwijfeld veel redenen voor het gebrek aan wiskundestudenten. Maar wie geen kans krijgt om het vak te leren kennen, krijgt ook geen kans om ervoor te kiezen.

### Junk mathematics

Helaas is het niet alleen zo dat wezenlijke inhouden worden ontkend, maar ook structureel worden vervangen door wiskundige onzin. Bijvoorbeeld in *Moderne Wiskunde* worden paragrafen ‘productfuncties’ of ‘quo-

tiëntfuncties’ genoemd (het hoofdstuk heet “Product- en Quotiëntfuncties”), waarin deze begrippen niet alleen worden ‘gedefinieerd’ (bijvoorbeeld: “Een quotiëntfunctie is een functie, waarvan zowel de teller als de noemer een functie van  $x$  is.”), maar waar de lezer ook attent op wordt gemaakt dat de afgeleide (altijd zonder enige specificatie van de klasse functies) van een quotiëntfunctie “meestal met de quotiëntregel” kan worden gevonden. “Hierdoor wordt de afgeleide ook weer een quotiënt.” Ook bij andere methodes zijn zulke voorbeelden aan te treffen (‘winende functies’, ‘weet- en zweetkansen’, ‘kettingfuncties’, enzovoorts) en je vraagt je als leraar af of de gemeenschap van wiskundigen in Nederland dit niet tegen kan houden. Ik ervaar dergelijke dingen als een belediging voor het intellectuele vermogen van leerlingen: “Rechthoeken waarbij de verhouding van de kortste zijde en de langste zijde ongeveer 1:1,618 is, heten gouden rechthoeken. Die verhouding heet de gulden snede.” (nieuwe editie brugklasboek, *Moderne Wiskunde*).

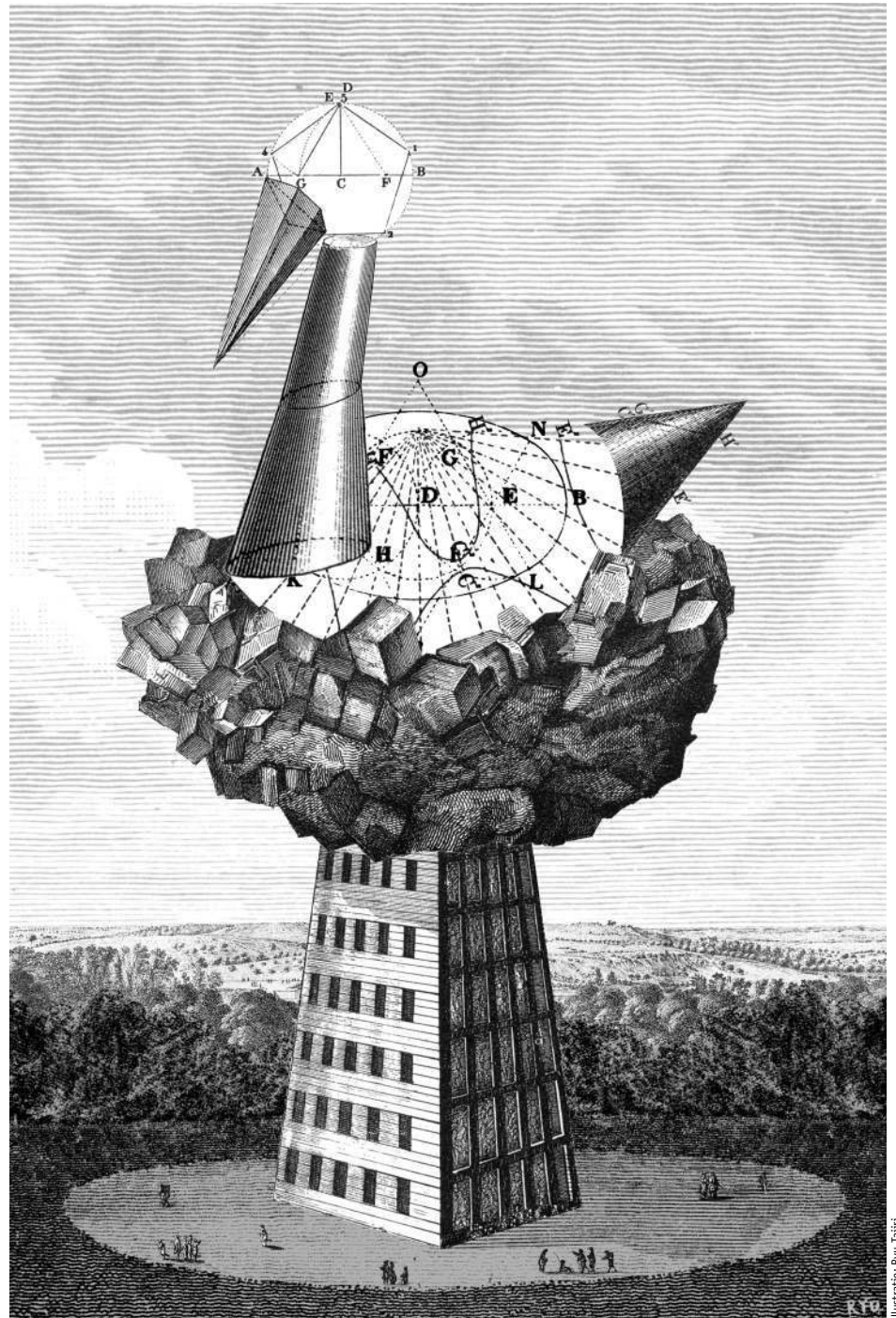
Bij opdrachten in de analyse worden zekere eigenschappen van functies ‘aangetoond’ door verschillende bewerkingen op de grafische rekenmachine (GRM) uit te voeren. Het probleem hierbij is dat dezelfde bewerkingen op de GRM deze eigenschappen ook bij functies aan kunnen tonen, die deze eigenschappen helemaal niet hebben. Van Streun schrijft in [10]: “De invoering van de grafische rekenmachine in havo-vwo heeft veel algebraïsch rekenwerk overbodig gemaakt en een verschuiving tot stand gebracht in de *oplossingsmethoden* die leerlingen gebruiken.”

Natuurlijk kan het gebruik van de GRM heel zinvol zijn; bijvoorbeeld om een indruk te krijgen van eigenschappen van een functie. Alleen is de zo verkregen kwaliteit van inzicht uiterst beperkt. Maar op het moment dat de *kwaliteiten van inzicht* niet meer worden onderscheiden, als het werken met te genvoorbeelden geen aanleiding meer geeft om begrippen scherp te krijgen en als bovendien de aangereikte begrippen zelf al niet deugen, ja dan vindt er inderdaad een “verschuiving van oplossingsmethoden” plaats. Er ontstaat een surrogaat van wiskunde: een *schoolwiskunde*. Dit is een verschijnsel dat Freudenthal het ooievaarsprookje van de wiskunde noemde. Het is dat wat je kleine kinderen vertelt over wat de echte wiskunde is. “Es ist das alte Lied der zwei Mathematiken; neben der seriösen eine Schulmathematik, ein Storchenmärchen. Nur kann dieses Storchenmärchen die richtige Mathema-

tik unmöglich machen. Inzwischen wird man von den Fabrikanten dieser Neuen Mathematik als Vertreter der alten Mathematik nicht ernst genommen." [5] Deze schoolwiskunde onttrekt zich aan de geldende regels van de wiskunde, door als een eigen denkcategorie op te treden. Bovendien heeft die schoolwiskunde ook weinig boodschap aan de afnemers van onze leerlingen. In het verslag van de NVvW-examenbesprekingen lezen wij: "De GRM is in het vervoltraject (hbo, TU) niet algemeen in gebruik. Is er overleg met de opleidingen?" Als men nu nog beseft dat ook tweedegraads lerarenopleidingen (die ook eerste-graads bevoegdheden uit mogen delen) met deze schoolboeken werken, wordt duidelijk hoe vast dit infantiele beeld van wiskunde op school zit ingebakken.

Omdat de wiskundige inhoud zelf bij de schoolwiskunde uiteindelijk behoorlijk saai is, wordt er veel moeite gedaan om haar op te leuken door een populaire taal. Maar geen of foute definities maken de taal willekeurig. Bijvoorbeeld een functie als  $f(x) = x^2 + x^2 \sin^2(\frac{1}{x})$  zou grote delen van de 'schoolanalyse' als een kaartenhuis laten instorten. Vandaar dat die ook nergens voorkomt. Beroofd van wiskundige taal moet er heel veel moeite worden gestoken in formuleringen. "Meneer, wat moet ik hier schrijven ...?" Bijvoorbeeld 'los op' staat nu niet meer voor de opdracht om het gevraagde uit de gegevens exact te berekenen zoals een naïeveling zou kunnen denken, maar: 'benader met je grafische rekenmachine alle plaatsen, waarvan je denkt dat er nul- of snijpunten zouden kunnen zijn!' Als er 'los op' in de naïeve zin is bedoeld, heet dat 'bereken exact' of 'los algebraïsch op' (bijvoorbeeld: 'los op:  $5\sqrt{x} = x$ '). En als er van de leerlingen wordt gevraagd, een idee van het verloop van een grafiek en de ligging van alle belangrijke punten door middel van de GRM te verkrijgen, luidt de opdracht: 'teken de complete grafiek', waarbij het begrip 'complete grafiek' al eerder werd geïntroduceerd. Bijna alle gangbare schoolboeken zitten vol met dergelijke formuleringen en ik zou er nog veel meer kunnen noemen.

Het spreekt vanzelf dat hierdoor een industrie van jurisprudentie ontstaat met een spits aan bedrijvigheid tijdens de examenperiode. In deze complete spraakverwarring kan alles ontstaan behalve wiskunde. Men verkondigt: "Als  $f(x) = \ln(x)$  dan is  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ." Al die regels kan geen mens onthouden, maar hiervoor heeft de schoolwiskunde een catechismus: *Wisforta*. In de examenprogramma's staan dingen als bijvoorbeeld: "De kandidaat kan ... de notatie  $\int_a^b f(t)dt$  herkennen en ge-



Illustratie: Ryo Tajiri

bruiken" en inderdaad wordt de kandidaat door de gangbare methodes voldoende op het eindexamen voorbereid. Nergens echter staat er in het examenprogramma: 'De kandidaat begrijpt...'

Maar wat moeten wij met deze schoolwiskunde? Freudenthal heeft wel eens een schoolboek uit de trein gegooid (zie [5]).

#### Opvoeding tot goede denkmannen

"Is er eigenlijk iets, wat de kinderen op school had moeten worden bijgebracht, maar wat ze gewoonlijk niet wordt bijgebracht? Ja-

zeker, en nog wel iets zeer belangrijks; namelijk de houding tegenover een probleem. Ik heb dit de 'opvoeding tot goede denkmannen' genoemd.", schrijft mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa [4] in 1960 in een heel andere onderwijspolitieke situatie. En juist in de opvoeding tot goede denkmannen ligt de pedagogische waarde van de wiskunde. Zij confronteert sterk met de eigen mogelijkheden en beperkingen en dit is altijd al een wezenlijke uitdaging van de wiskundendidactiek geweest. Door verschillende kwaliteiten van inzicht te onderscheiden en waar te kun-

nen nemen is het een uitstekend gebied om zo iets op te bouwen als *intellectuele eerlijkheid*. Verder is het één van de mogelijkheden om jonge mensen in contact te brengen met waardevolle bronnen van onze cultuur. Wil Derkse, hoogleraar filosofie aan de Katholieke Universiteit Nijmegen, schrijft in *Een pleidooi voor een onderwijs'wende'* [3] over 'de opgroeiende mens': "De antropologische en pedagogische randvoorwaarden voor zo'n groei en bloei zijn vanouds dat mensen het beste groeien aan wat waar is, aan wat mooi is, aan wat goed is — verum, pulchrum, bonum." In deze behoefte van mensen kan wiskunde uitstekend voorzien. En het aardige is dat leerlingen hierdoor ook nog bijzonder goed worden voorbereid op veel meer utilitaristische eisen van techniek en maatschappij. Vooral zijn ze dat nog tegen de tijd dat bijvoorbeeld Word, Excel of de GRM tot het verre verleden behoren, waarmee ik niet wil zeggen, dat je deze dingen moet negeren. Wiskunde geeft inzicht in wat mensen überhaupt kunnen weten en daardoor — en vooral daardoor — kan de wiskunde een mondige en kritische houding bij mensen bevorderen. In die zin kan wiskunde in dienst staan van de verlichting.

"Zo is het 'wiskundig denken'! Kan men daarin enige speciale wegen aangeven, die het van het denken over andere objecten onderscheiden? Moet men niet eerder van de 'wiskundige eerlijkheid', waarmee men zich tegenover het probleem gedraagt en van het 'wiskundig formuleren' spreken?", schrijft mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa verder. Veel beter dan ik het zou kunnen kenmerkt zij, wat centraal moet staan in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs.

"Wat is wetenschappelijk? Ik zou zeggen: datgene wat doorzichtig, van al het overtolige bevrijd, samenhangend en eerlijk is — het tegenovergestelde van slordig, onduidelijk, onsamenhangend, drogredenen in plaats van eerlijke argumenten gebruikend."

Ook aan het volgende citaat valt niets toe

te voegen. "Ik zou graag nog een eis aan het wiskundeonderwijs willen stellen: De leerlingen moeten de kunst van het lezen van een wiskundeboek leren. De mens kan niet eeuwig een kindermeisje achter zich aan hebben, die hem helpt iets te begrijpen. Ook is het verkeerd hem tot in de hoogste klassen van de middelbare school op een 'pedagogische wijze' les te geven. Als deze wijze effectief is, dan moet ze na een bepaalde tijd vanzelf overbodig worden."

### Constructivisme

Al deze opvattingen zijn nergens in tegenpraak met de constructivistische leeropvatting (zie [1]), die ten grondslag ligt aan het studiehuis en de tweede fase. Juist hier liggen grote kansen voor het wiskundeonderwijs. Lang voordat het constructivisme er was, formuleerde Pólya [8] al zijn "three principles of learning: active learning, best motivation, consecutive phases: exploration, formalization and assimilation." En ook in de praktijk geven juist de *praktische opdrachten* en de *profielwerkstukken* leraren weer een beetje vrijheid, hun eigen visie op het vak vorm te geven. Wel moet juist hier — mits het zelfstandig leren van de leerlingen serieus wordt aangepakt — een leraar vakinhoudelijk stevig in zijn schoenen staan. Pólya [8] merkt hierover op: "Everybody demands that the high school should impart to the students not only information in mathematics but know-how, independence, originality, creativity. Yet nobody asks these beautiful things for the mathematics teacher — is it not remarkable?"

### Passing the torch to the next generation

Wat moeten wij doen om deze leus [2] waar te maken?

Ik denk niet dat we in eerste instantie het wiskundeonderwijs moeilijker moeten maken — het moet wiskundig en intellectueel eerlijker. Heel belangrijk hiervoor is dat er meer inhoudelijke *vrijheid* wordt geschapen voor leraren die zelf een visie hebben op wiskun-

de en deze ook willen blijven ontwikkelen. Maar hoe kan zo'n eigen visie bij leraren ontstaan? Dat staat of valt met de lerarenopleiding en de vervolgopleidingen. De lerarenopleidingen moeten zoveel mogelijk plaatsvinden op de universiteit en daar veranderen. Alleen op de universiteit bestaat de reële kans die afgesloten kringloop 'school, lerarenopleiding, school' te doorbreken. Maar ook op de universiteit gaat nogal wat verkeerd. De wiskundeleraar Frans Pagen schrijft hierover in het NAW [7]: "Daarna leek de universiteit veel op de middelbare school en heb ik wel veel formele wiskunde geleerd (en weer vergeten), maar weinig over de betekenis van die wiskunde." "Ik leerde ook dat de wiskunde blijkbaar verworpen is tot een wildgroei van allerlei specialisaties. Zo zeer, dat het blijkbaar niet meer mogelijk is om een inhoudelijk geïntegreerd overzicht ervan te geven. Ik moest het doen met de classificatie uit de bibliotheek."

Bij het advies van Pagen sluit ik mij volledig aan: "Wanneer docenten meer ruimte krijgen om hun eigen voorkeuren aan bod te laten komen, zal er voor de leerlingen ook een realistischer beeld omtrent de wiskunde ontstaan." De universitaire opleiding moet toekomstige leraren tot geleerden in hun vak maken, die naast wiskundige technieken ook een overzicht over het vak moeten hebben en dat in een cultuurhistorisch kader kunnen plaatsen. Er moeten vele inhoudelijke verbanden worden gelegd tussen de wiskunde op school en op de universiteit. Hiervoor moeten zowel regelmatig leraren naar de universiteit alsook universitaire wiskundigen naar de scholen toe. Ik weet, dit is allemaal veel gevraagd in tijden van lerarengebrek. Maar wij allen hebben behoefte aan visie.

Ook zonder wiskunde zal de wereld niet ten onder gaan. Leraar zijn betekent veel meer dan met wiskunde bezig zijn. Maar als wiskundeleraar is het niet onze taak om er een leuk vak van te *maken* — we moeten laten zien dat wiskunde een leuk vak *is*. ←

### Noten en referenties

- 1 Verschaffel en de Corte, *Leren wordt in het algemeen opgevat als een constructief, cumulatief, zelfgestuurd, doelgericht, gesitueerd, coöperatief en individueel verschillend proces van kennisverwerving, betekenisgeving en vaardigheidsontwikkeling*, 1998.
- 2 Titel van een voordracht van Tony Gardiner bij *Mathe ist top*, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 2000.
- 3 W. Derkse, *Een pleidooi voor een onderwijs'wende': vitaal leren*, Tempora, Vught, 2002.
- 4 T. Ehrenfest-Afanassjewa, *Didactische opstellen*, N.V.W.J Thieme & Cie, Zutphen, 1960.
- 5 H. Freudenthal, *Mathematik als eine pädagogische Aufgabe*, Band I en II, Klett Studienbücher, Stuttgart, 1973.
- 6 J. de Geus, 'Verslag NVVW-examenbesprekingen', *Euclides*, jaargang 78, nr.1, 2002.
- 7 F. Pagen, 'De magie van wiskunde', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/3, nr. 3, 2002.
- 8 G. Pólya, *Mathematical discovery II*, Wiley & Sons, 1965.
- 9 A. van Streun, 'Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs ervoor?', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/2, nr. 1, 2001.
- 10 A. van Streun, *Het denken bevorderen*, inaugurele rede A. van Streun, in verkorte vorm uitgesproken op 18 december 2001, RuG. (Zie ook NAW 5/3, nr. 4, 2002.)