

Frans Pagen

Van Heukelomlaan 107

3555 EC Utrecht

franspagen@cs.com

Opinie

De magie van wiskunde

In de tachtiger jaren behaalden de meeste wiskundestudenten, zoals ook Frans Pagen, naast hun doctoraal examen een onderwijsbevoegdheid. Frans Pagen studeerde wiskunde in Utrecht. Aanvankelijk trad hij in dienst als netwerkdeskundige bij PTT Telecom. Hij ervoer deze arbeid echter als onbevredigend. Sinds 1992 was hij betrokken bij allerlei vrijwilligerswerk, zoals bij 'Taalhulp NT2' (Nederlands als tweede taal). Ook gaf hij computerles bij welzijnsinstellingen. Aan het eind van de jaren negentig ontstond er een enorm tekort aan wiskundeleraren. In december 1998 werd hij vervangend docent wiskunde in een zogenaamde Internationale Schakelklas (ISK) aan het Prisma College te Utrecht. Hij was reeds lang eerstegraads bevoegd, maar volgde desondanks een opfriscursus voor docent wiskunde. Hier geeft hij een persoonlijk verslag hoe hij zijn eigen studie heeft ervaren en hoe hij tegenwoordig tegen het wiskundeonderwijs aankijkt.

De wiskunde werd tijdens mijn middelbare schooltijd (1970–1976) op het gymnasium abstract gedoceerd. Weinig, zoniet geen, context en achtergronden. Nog met verzamelingen en congruentie van driehoeken (gegeven, te bewijzen, bewijs). Schoolboeken zonder kleurrijke plaatjes en toepassingsopgaven.

Na een kleine adaptatie-periode, waarin ik intuïtief de werking van variabelen en andere formalismen doorzag, heb ik geleerd om

díe antwoorden te geven die de leraar tevreden stelden (ik was toen nog heel gezagsgetrouw). Mijn punten schoten omhoog, maar ik begreep er weinig van.

Dat ik echt geen talent voor wiskunde had, werd pijnlijk duidelijk toen ik bij de voorronde voor de Wiskunde Olympiade slechts 3 van de 20 punten scoorde. Vreselijke opgaven: het belang en de draagwijdte ervan ontgingen mij volkomen waardoor mij de motivatie werd ontnomen (als ik al de kennis en/of intelligentie gehad zou hebben om ze op te lossen). Blijkbaar hielden wiskundigen van doelloze puzzels.

De universiteit

Toch vond ik wiskunde een intrigerend vak. Het klopte allemaal zo mystiek mooi, het gaf aanzien als je 'er goed in was' en het was blijkbaar erg nuttig, want verplicht. Mijn nieuwsgierigheid overwon mijn angst voor onbegrijpelijke formules en onoplosbare problemen en ik ging wiskunde studeren; nu zou alles duidelijk worden.

Helaas, de werkelijkheid was anders. Na weer een korte adaptatie-periode begreep ik welke eisen er nu aan mijn antwoorden gesteld werden: bewijzen! Toen ik doorkreeg wat wel en niet als bewijs acceptabel werd gevonden (ik wacht nog steeds op het bewijs van de bewijskracht van bewijzen), schoten mijn cijfers weer omhoog. Daarna leek de universiteit veel op de middelbare school en heb ik

wel veel formele wiskunde geleerd (en weer vergeten) maar weinig over de betekenis van die wiskunde.

Ik leerde dat het mogelijk is om begrippen vergaand te abstraheren en te generaliseren. Op zich heel mooi, als je weet waar je het voor doet. Jammer genoeg was daar minder aandacht voor. Wel werd je aangemoedigd om gebruik te maken van de bibliotheek, maar de meeste wiskundeboeken zijn beter geschikt voor symboolverwerkende automaten dan voor gewone mensen: definitie, stelling, bewijs, definitie, stelling, bewijs, ... Blijkbaar kon je wiskunde alleen maar leren door het te doen, door sommen te maken en er vooral niet dieper over na te denken of erover te discussiëren, het inzicht zou vanzelf wel groeien.

Ik leerde ook dat de wiskunde blijkbaar verworpen is tot een wildgroei van allerlei specialisaties. Zo zeer, dat het blijkbaar niet meer mogelijk is om een inhoudelijk geïntegreerd overzicht ervan te geven. Ik moest het doen met de classificatie uit de bibliotheek.

En, eerlijk is eerlijk, ergens tijdens mij studie was er ook een college over de grondslagen van de wiskunde. Maar dat ging alleen over de traditionele verzamelingenleer en logica. En op het eind van mijn studie waren er ook een aantal keuzecolleges over de geschiedenis van de wiskunde, over wiskunde en maatschappij en schoolwiskunde. Helaas, voor mij was het 'too little, too late'.

Wat is er mis?

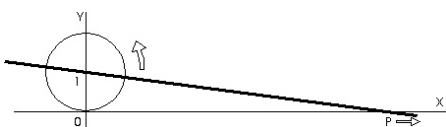
De grootste gemene deler van mijn ervaringen is de formele benadering van de wiskunde. Natuurlijk besef ik dat de wiskunde haar succes voor een groot deel te danken heeft aan deze benadering; goede formalismen helpen het denken en stellen ons soms zelfs in staat om automatisch te rekenen. Maar de weg naar deze formalismen is vaak lang geweest en soms zelfs niet helemaal af. Voor een goed begrip van een formalisme is een juiste interpretatie ervan van essentieel belang. Ter illustratie hiervan werp ik een korte blik op de manier waarop er binnen het wiskundeonderwijs en de wiskundige praktijk wordt omgegaan met formalismen en hun betekenis.

Wat leren wij onze kinderen op school? Ik zal hier een paar simpele voorbeelden geven met betrekking tot getallen, als het ware gezien door de ogen van het kind.

Bedenk wel, kinderen hebben nog een levendige fantasie. Voor kinderen is het dus moeilijk om wiskunde zuiver formeel te beschouwen. Van de andere kant, onderschat kinderen ook niet. Ik heb tijdens mijn wiskundestudie meegewerkt aan een experimentele leergang rekenen voor kinderen van zes en zeven jaar, waarbij ze leerden werken met de eigenschappen van allerlei relaties. Dat bleek goed mogelijk, als je het begrip maar van concreet naar abstract opbouwt (dat wil zeggen het begrijpen vormgeeft als het concreet manipuleren van voorwerpen en later van kaartjes met abstracte symbolen).

Laat ik beginnen met het woord 'getallen'. Wat zijn eigenlijk getallen? Voor kinderen wordt deze vraag impliciet aan de orde gesteld wanneer ze kennismaken met de negatieve getallen. Dan verschijnt er opeens een min-teken en de getallen die ze al kenden zijn opeens positieve getallen, maar daar zet je dan vreemd genoeg geen plus-teken voor. Het min-teken kenden ze al van het aftrekken. Krijgt dat teken nu een andere betekenis?

Wat is de juiste interpretatie van $2 + 3$? Moet je het lezen van links naar rechts? Of maakt dat niet uit, maar waarom zou je dan moeten aantonen dat $2 + 3 = 3 + 2$? Is het een samenvoeging van een groepje van 2 met een groepje van 3? Maar wat is dan op de getallenlijn de samenvoeging van de posities 2



Figuur 1 Het punt P schuift naar rechts. Omdat P het oneindige niet kan bereiken, zal de rechte ook niet helemaal parallel aan de X -as komen te staan.

en 3? Merk op: er worden soms meerdere interpretatie-modellen gebruikt om formele concepten te introduceren, maar die vertonen vaak subtiele verschillen, waardoor ook het begrijpen van het formalisme (onbewust) onduidelijk kan worden.

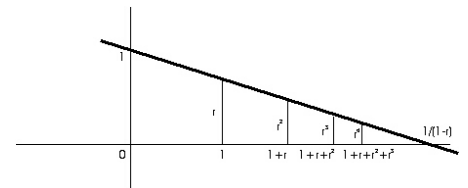
Wat is de juiste interpretatie van 2×3 , $2 + 2 + 2$ of $3 + 3$? Of betreft het een scalaire vermenigvuldiging? Wanneer moet je het interpreteren als de lengte 6 en wanneer als de oppervlakte 6? Merk op: in de wiskunde worden de eenheden weg geabstraheerd. Mag dat altijd? Mag je, zeker als je getallen in een meetkundige of visuele context (grafieken) gebruikt, je interpretaties willekeurig kiezen?

Breuken worden traditioneel als moeilijk ervaren en de optelling en vermenigvuldiging ervan zijn natuurlijk ook complexer. Maar begripmatig is de situatie nog veel ingewikkelder. Je hebt delingen, fracties, breuken, gebroken getallen, verhoudingen, rationale getallen, die aangeduid worden met de Q van quotiënten. Je hebt de schuine en horizontale deelstreep, de dubbele punt en dat gekke teken op je rekenmachientje. Is $\frac{6}{4}$ een deling, een verhouding of een breuk? Vergelijk dit eens met $4 - 6$: is dit een aftrekking, een verschil of een negatief getal? Wat bedoel je met $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ en wat met $4 - 6 = -2$? Moet je niet onderscheid maken tussen grootheden (verhoudingen, verschillen) en de getallen (rationale getallen resp. gehele getallen)? Zouden getallen niet uniek moeten zijn? Is het vereenvoudigen van breuken in feite niet het bepalen van de equivalentieklasse van verhoudingen?

Zeno

We schakelen nu over naar de hogere wiskunde. U kent vast wel de beroemde paradoxen van Zeno. Voor mijn doel is de volgende versie het meest duidelijk: geen mens kan een afstand van 2 meter overbruggen, want steeds als je de helft van de overgebleven afstand afgelegd hebt, blijft de andere helft nog af te leggen en dit gaat tot in het oneindige door. Dit correspondeert wiskundig met de oneindige reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ als model voor de afgelegde afstand. De standaard wiskundige verklaring van de paradox is dan ook meestal dat Zeno blijkbaar niet op de hoogte was van de theorie van de oneindige reeksen, anders had hij wel geweten dat deze reeks als limiet 2 heeft, immers als je de getallen van de reeks stuk voor stuk optelt kom je willekeurig dicht bij 2. Maar dat was nou net het probleem: je komt willekeurig dichtbij, maar kom je er ook?

Zeno zegt eigenlijk dat het oneindig lang duurt voordat je de afstand overbrugd hebt.



Figuur 2 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r tussen 0 en 1.

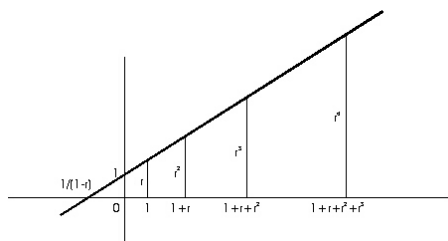
Daarmee suggereert hij dat iedere 'stap' in de reeks even lang duurt (of in ieder geval dat de tijdstappen opgeteld oneindig groot zijn). We moeten dus een aanname maken omtrent het tijdsverloop, oftewel omtrent de snelheid, zeg dat deze constant gelijk is aan 1 meter per seconde. Onze reeks wordt nu een functie, de afstand als functie van de tijd. Voor het tijdsverloop kunnen we dezelfde reeks opstellen. We zien dat de verlopen tijd op dezelfde wijze tot 2 seconden nadert, als de afgelegde afstand tot 2 meter nadert (of andersom). De paradox blijft dus. Uiteindelijk zullen we ons toch moeten beroepen op onze ervaring, die leert dat beweging een continu proces is.

De moraal van dit verhaal: Zeno zegt met zijn paradoxen iets over de verhouding van de wiskunde tot de natuurkunde. Specifiek vestigt deze paradox de aandacht op het feit dat een oneindige reeks een heel abstract formeel ding is. In dit geval omdat het tijdsverloop en de continuïteit van het natuurkundige proces niet mee gemodelleerd worden. In het algemeen kun je je afvragen in hoeverre je uitspraken omtrent de convergentie van zo'n reeks kunt doen zonder aannamen te doen omtrent een of andere context.

Bekijk eens de volgende variant van de paradox (zie figuur 1). In het platte vlak denk ik een rechte lijn door het punt $(0,1)$ die de X -as snijdt in het punt P . Wanneer ik de rechte tegen de klok in laat draaien, met $(0,1)$ als centrum, schuift P naar rechts. Omdat P nooit het oneindige kan bereiken, zal de rechte nooit helemaal parallel aan de X -as kunnen worden.

Wat klopt hier niet? Onze ervaring (interpreteer de rechte bijvoorbeeld als de kijkrichting van iemand die in $(0,1)$ om zijn as draait) leert ons dat, als we de rechte met constante snelheid ronddraaien, hij alle richtingen zal doorlopen en vanwege de continuïteit van de beweging op zeker moment ook parallel aan de X -as loopt. Vervolgens 'springt' dan het snijpunt P van $+\infty$ naar $-\infty$. Wiskundig gaan we hier dus 'door oneindig'. Natuurkundig ligt de zaak anders: niets kan oneindig snel het eind van de rechte bereiken.

Traditioneel wordt gesteld dat de reeks $1 + r + r^2 + \dots$ convergeert voor reële getal-



Figuur 3 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r groter dan 1.

len r tussen -1 en $+1$. Dit op grond van het feit dat r^n naar 0 convergeert als n oneindig groot wordt en daarmee de partiële sommen $\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ van de reeks naar $\frac{1}{1-r}$. Impliciet interpreteer je daarbij de reële getallen als een 1-dimensionale getallenlijn en zie je de verhoudingen uit de vorige zin als verhoudingen tussen 'lijnstukken' op deze getallenlijn.

Je kunt de limiet ook op een andere manier berekenen. Stel dat de limiet bestaat, noem hem s , en dat hij daadwerkelijk aangenomen wordt, dus niet alleen benaderd, dan moet gelden $s = 1 + r + r^2 + \dots = 1 + r(1 + r + r^2 + \dots)$ dus $s = 1 + rs$ oftewel $s = \frac{1}{1-r}$. Je maakt dan gebruik van de zelfgelijkvormigheid van de reeks. Bij deze berekening moet je verder alleen eisen dat $r \neq 1$ of afspreken dat $s = \infty$ voor $r = 1$ en $s = 0$ voor $r = \pm\infty$, alle andere waarden van r zijn toegestaan. Maar hoe kan dat? Hoe moet je bijvoorbeeld $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ interpreteren of $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$?

Kijk nog eens naar de vergelijking $s = 1 + rs$ en schrijf hem als $0 = 1 + (r - 1)s$. Hier staat een vergelijking voor het snijpunt van de lijn $y = 0$ met de lijn $y = 1 + (r - 1)s$. Kijk dan nog eens naar figuur 1 van de paradox en naar figuur 2.

Ik interpreteer de reeks $1 + r + r^2 + \dots$ nu als een 'proces', dat de rechte door $(0,1)$ tegen de klok in draait, zó dat het snijpunt met de X-as achtereenvolgens de punten $1, 1+r, 1+r+r^2$, enzovoort doorloopt en tenslotte eindigt in het punt $\frac{1}{1-r}$.

Laat ik het snijpunt 'sneller' lopen dan $1 + 1 + 1 + \dots$, dan schiet de rechte voorbij de parallelstand en krijg ik bijvoorbeeld figuur 3. Is r negatief, dan 'schommelt' het proces heen en weer en krijg ik bijvoorbeeld figuur 4.

Zoals ik mijn interpretatie tot dusver heb verwoord, is hij nogal vaag. Er valt meer over te zeggen, maar dat zou in het kader van dit artikel te ver voeren. Ik eindig met figuur 5 die een interpretatie geeft van de verhouding $\frac{1}{1-r}$ en laat daarmee zien dat dit onderwerp verrassend aansluit bij de al gangbare praktijk.

Uit de gegeven voorbeelden blijkt hoe makkelijk er verwarring kan optreden bij de interpretatie en als gevolg daarvan bij de hantering van formalismen. Soms zijn er meerdere

interpretaties mogelijk, waardoor het begrip van het formalisme onduidelijk kan worden. Soms is onduidelijk welke interpretaties toegestaan zijn en soms kan een nieuwe interpretatie leiden tot een ander begrip van het al bestaande formalisme.

Kan het beter?

Tegenwoordig doen we het in het middelbaar onderwijs 'realistischer': leuke plaatjes en soms knap gevonden metaforen om concepten duidelijk te maken, zeer contextrijke opgaven met een stapsgewijze opbouw, waardoor je moeilijk opgaven over kunt slaan, verdiepsstof die ik verplicht moest behandelen — is dat de individuele benadering van leerlingen? Gebruik van rekenmachientjes vanaf de brugklas, waardoor er vanaf de derde klas grote problemen ontstaan wanneer er uitsluitend met letters gerekend moet worden.

Zonder alle vernieuwingen te willen bagatelliseren, vaak zijn het op zichzelf wel verbeteringen, ben ik van mening dat er per saldo te weinig verbeterd is.

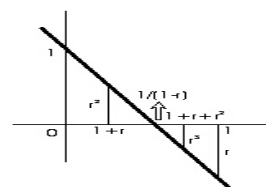
Ten eerste heeft de vernieuwing vooral betrekking op het anders aanleren van wiskunde: van concreet naar abstract. Ging je vroeger meteen aan de gang binnen een formalisme waarvan de achtergrond niet duidelijk was, nu begin je vanuit concrete situaties en voer je zo beetje bij beetje een (door de verschillende contexten) vaak onduidelijk formalisme in. Zo vervang je de ene eenzijdigheid door de andere. Volgens mij gaat het om een goede kennis van het formalisme zelf én een goed inzicht in de juiste interpretatie en toepassing van dat formalisme. Wil je dat alle leerlingen gevoel voor deze aspecten ontwikkelen, dan zou je deze aspecten expliciet aan de orde moeten stellen. Anders blijft wiskunde, zelfs voor de leerlingen met aanleg, op bewust niveau een onbegrepen vak, dat sterk leunt op indoctrinatie.

Ten tweede zit er weinig ontwikkeling in een wiskundig verantwoorde opbouw van de leerstof zelf. Dan doel ik bijvoorbeeld op de gebrekkige opbouw van het begrip van (vooral) de rationale en reële getallen, die nog verergerd wordt door het gebruik van rekenmachientjes, het verwaarlozen van het verschil tussen vectoren (eigenlijk een dynamisch concept) en posities oftewel statisch gedachte toestanden, het omgaan met het oneindigheidsbegrip enzovoorts. Aangezien andere concepten op deze basisbegrippen voortbouwen, zal iedere onduidelijkheid zich later wreken. Volgens mij zou hier meer onderzoek naar gedaan moeten worden.

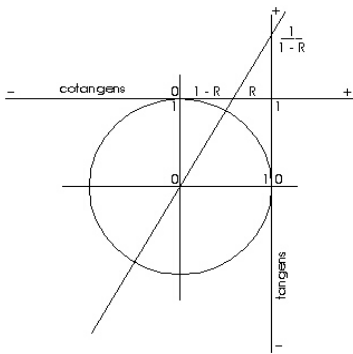
Ten derde blijft de doelmatige benadering van de leerstof erg opportunistisch. Sommige onderwerpen verdwijnen, nieuwe komen daar weer voor in de plaats. Onder de vormende werking van wiskundeonderwijs kan blijkbaar steeds iets anders worden verstaan; wat ontbreekt is een goede uitwerking van deze werking, gebaseerd op een cultuurhistorisch en neuropsychologisch onderbouwde visie op de wiskunde. Dat moet mogelijk zijn, nu het onderzoek van de geschiedenis van de wiskunde zoveel vruchten afwerpt en er steeds meer bekend wordt over de werking van onze hersenen.

Ook zonder zo'n visie zijn er thema's te bedenken waarbij het belang en de rol van wiskunde op een interessante manier aan de orde gesteld zou kunnen worden. De meetkunde met zijn te bewijzen stellingen biedt een goed kader voor het bespreken van de waarheid van wis- en natuurkundige uitspraken ten aanzien van een of andere buitenwereld, met name ten aanzien van de rol die tellen en meten, de visuele waarneming en het logisch redeneren hierin spelen. Minstens zo interessant is het bepreken van de relatie tussen wiskunde en ons denken. Concepten als verzamelingen, (cor)relaties, equivalentieklassen, inter- en extrapolatie, logica enzovoorts bieden daar aanknopingspunten voor. Wiskunde speelt een belangrijke rol in onze huidige economische en technologische cultuur; dat blijkt wel uit de opgaven. Maar je zou die rol ook expliciet aan de orde kunnen stellen. De ontwikkeling van de wiskunde verdient het om in een cultuurhistorisch kader te worden geplaatst, al was het maar door het vertellen van interessante anekdotes.

Nu zou je de huidige onderwerpkeuzes ook (platvloerser) kunnen verklaren uit de wensen vanuit andere vakken, het bedrijfsleven of de maatschappij in het algemeen. Dit is een ingewikkeld afstemmingsprobleem, dat samenhangt met de visies op wiskunde, op andere vakken (zou natuurkunde bijvoorbeeld niet wat praktischer, empiristischer en minder formalistisch benaderd kunnen worden?), op het bedrijfsleven (dat vaak hele specifieke kennis gebruikt en misschien zelf meer daarin zou



Figuur 4 De limiet van $1 + r + r^2 + \dots$ voor r tussen -1 en 0 .



Figuur 5 Een interpretatie van de verhouding van 1 tot $1 - r$.

moeten investeren?) en op het onderwijs in het algemeen (zou gesubsidieerd onderwijs niet vooral algemeen vormend moeten zijn?). Het is de vraag in hoeverre je bepaalde wiskunde zou kunnen 'doorschuiven' naar een bepaald vak of naar bedrijfsopleidingen (om zodoende de motivatie door noodzaak te verhogen) en naar hogere opleidingen (wanneer leerlingen geestelijk wat rijper zijn).

Ten vierde, en dat sluit aan bij het vorige punt, er wordt volgens mij onvoldoende rekening gehouden met het feit dat je wiskunde kunt beoefenen vanuit verschillende persoonlijke geaardheden en motivaties. Mensen voelen zich om verschillende redenen tot de wiskunde aangetrokken. Voor sommigen is het misschien de kick van het oplossen van problemen (de 'puzzelaars') of de esthetische bevrediging van het creëren van modellen (de 'modelbouwers'), voor anderen het feit dat je met behulp van wiskunde een hoop nuttige dingen kunt doen (de 'ingenieurs', traditioneel sterk vertegenwoordigd in Nederland), weer anderen menen dat ze zo een groter inzicht in 'de (materiële) buitenwereld' of zelfs 'de (immateriële) bovenwereld' krijgen (de (meta)fysici en mystici) en voor de meesten zal het een mix zijn van dit soort redenen. Wanneer docenten meer ruimte krijgen om hun eigen voorkeuren aan bod te laten komen, zal er voor de leerlingen ook een realistischer beeld omtrent de wiskunde ontstaan.

Hoe wetenschappelijk is de wiskundestudie?

Veel van de hiervoor uitgezette denklijnen kun je moeiteloos doortrekken naar het hoger onderwijs. Ik richt mijn pijlen weer op de universiteit, met de kanttekening dat ik minder op de hoogte ben van de huidige situatie daar. Ik geloof dat ik de formele theorieën die mij op de universiteit kant-en-klaar voorgeschoteld werden inmiddels enigszins kan plaatsen, qua achtergrond en toepasbaarheid, maar dat is meer de verdienste van schrijvers met een geschiedkundige, filosofie-

sche of populair-wetenschappelijke benadering. Waar ik nog steeds moeite mee heb is de onderbouwing van deze theorieën.

Dat wil zeggen, volgens mij worden er bij de ontwikkeling van theorieën allerlei gemotiveerde keuzes gemaakt die consequenties hebben voor de visie op bepaalde wiskundige concepten, maar die motivaties, keuzes en visies worden (in mijn beleving) vaak niet als zodanig gepresenteerd of openlijk bediscussieerd. Ze zitten verstopt in de, vaak naast elkaar staande en vanuit verschillende gezichtspunten redenerende, kant-en-klaar theorieën. Verstopt in kant-en-klaar axioma's, definities, existentiële aannames en bewijsmethoden. Verstopt in de binnen het onderwijs gehanteerde metaforen en interpretatiemodellen.

Ik had mij van een academische opleiding meer voorgesteld. Een wetenschappelijke opleiding zou toch moeten gaan over de kernideeën en -methoden, hoe ze ontstaan zijn, onder welke aannames ze geldig zijn, wat men ermee probeerde te bereiken, in hoeverre dat gelukt is (kritische zelfbeschuwing), hoe je zelf ideeën kunt ontdekken en ontwikkelen, hoe je onderzoek doet?

Een sociale kijk

Misschien vindt u dat ik met mijn betoog de magie van de wiskunde ondergraaf. Het tegendeel is mijn bedoeling. Juist als je je afvraagt wat wiskunde is, hoe het wordt ontwikkeld, onderwezen en toegepast, en dat blijft een alsmaar voortgaande intellectuele ontdekkingstocht, ga je volgens mij openstaan voor het wonder van onze creatieve geest. Wel pleit ik ter wille van de duidelijkheid voor meer onderzoek naar deze zaken.

Wiskunde is een cultureel én biologisch fenomeen, met raakvlakken aan vele wetenschappen, en verdient het dus om in het juiste cultuurhistorische én neuropsychologische kader geplaatst te worden. Het is niet voldoende dat wij het belang van wiskunde weten, we moeten dat ook aan anderen duidelijk kunnen maken. Of koesteren wij liever ons imago van wereldvreemde cijferaaars?

Er zou meer aandacht moeten komen voor een juiste interpretatie en presentatie van wiskundige formalismen. Mijn voorbeelden ten aanzien van de rationale getallen en oneindige reeksen laten zien dat we ons voortdurend moeten realiseren dat we bezig zijn met formele objecten, die een duidelijke interpretatie behoeven om begrijpelijk te zijn. Of zijn we er tevreden mee dat mensen zich van de wiskunde afkeren omdat ze er niets van begrijpen?

De manier waarop iemand de wiskunde benadert, heeft alles te maken met zijn of haar persoonlijkheid en interesse. Je kunt met wiskunde veel kanten op, wat je kunt gebruiken om beter bij de individuele ontwikkeling van leerlingen en studenten aan te sluiten, maar ook bij de individuele interesses en vaardigheden van docenten. Dat past niet bij uniforme leerstof voor iedereen. En ook niet bij uniforme docenten.

Natuurlijk zal een deel van de leerstof vanuit maatschappelijk oogpunt voor iedere leerling verplicht moeten zijn en stellen bepaalde vakken hun eisen. Maar hoeveel middelbare wiskunde wordt er buiten de schooltijd echt gebruikt? Proberen we alle leerlingen tot ingenieurs op te leiden, of laten we geïnteresseerde leerlingen breder kennismaken met de verschillende aspecten van een intellectueel uitdagende discipline?

Tenslotte pleit ik voor een grotere rol van de filosofie en het wetenschappelijke debat in (en niet buiten) de wiskundige praktijk en het wiskundeonderwijs. Niet om nutteloos te navelstaren, maar als praktisch hulpmiddel voor het ontwikkelen van een kritisch bewustzijn en meer begrip en als creatieve inspiratiebron.

Ik krijg vaak het gevoel dat de individuele (vaak onbewust gemotiveerde) creatie van wiskunde binnen de wiskundige gemeenschap hoger aangeschreven staat dan een sociale (bewust gemotiveerde) kritische beschouwing ervan. Dat geeft de wiskunde een soort bovennatuurlijke en intimiderende ongenaakbaarheid, alsof het evidente absolute waarheden betreft waaraan niet getwijfeld kan worden. En het versterkt het imago van de wiskundige als superintelligente maar niet erg communicatieve eenling.

Juist voor het verfijnen van de basisbegrippen lijkt mij een nuchtere en sociale kijk op wiskunde bevorderlijk. En ook bij het onderwijs en de presentatie van wiskunde zou meer aandacht aan deze aspecten besteed kunnen worden, zodat wiskunde wat minder het witte konijn is dat uit de hoge hoed van de wiskundige goochelaar getoverd wordt.