Frits Beukers
Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
beukers@math.uu.nl

Inaugurele rede

Weg van ge

Dit is de tekst van de inaugurele rede die Frits Beukers uitsprak bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de algebra aan de Universiteit Utrecht op 22 oktober 2001.

"Wiskunde, dat vond ik vroeger zo'n moeilijk vak, ik was er altijd heel slecht in". Dat is de meestgehoorde reactie die een beroepswiskundige krijgt als hij vertelt dat wiskunde zijn vak is. Zelf reageer ik meestal in de trant van "ieder z'n vak" of "dat is weer een concurrent minder", maar ik geef toe dat dit niet de sterkste antwoorden zijn. Goed beschouwd weerspiegelt deze reactie een diepe kloof die bestaat tussen wiskundigen en niet-wiskundigen. Veel mensen hebben niets met wiskunde en anderen zijn er simpelweg bang van. Ervaringen op school, het aura van moeilijkheid, of anders wel van saaiheid, dit alles draagt bij tot een wijdverbreide neiging van mensen om zich verre te houden van alles dat naar wiskunde riekt. Ook in de mededeling "ik was vroeger heel slecht in wiskunde" zit een zekere distantiëring verborgen. Dat mijn gesprekspartner slecht was in wiskunde wil ik best wel geloven. Maar de reactie wordt vaak uitgesproken met een zekere tevredenheid, of anders wel opluchting, die duidelijk moet maken dat hij of zij zich gelukkig prijst tot het normale deel van onze bevolking te horen. Niemand zou het in zijn hoofd halen om met dezelfde blijmoedigheid te verklaren dat hij of zij vroeger heel slecht in spelling was. Woorden niet goed kunnen spellen staat dom, maar slecht zijn in wiskunde telt kennelijk als een zekere aanbeveling. Nu wil ik daar verder geen drama van maken. De eerlijkheid gebiedt mij zelfs te zeggen dat ook wiskundigen soortgelijke menselijke trekjes hebben. Een aantal malen heb ik collega's van mij met een zekere trots horen verkondigen dat de natuurkunde-experimenten die zij in hun studietijd moesten uitvoeren, steevast mislukten. Soms moesten zij zelfs door de practicumstaf van de knoppen worden gehouden om ergere rampen te voorkomen.

Door de grote onbekendheid van veel mensen met wiskunde is het voor hen niet te bevatten dat er medemensen zijn die het wél leuk vinden. Men is nog verbaasder om te horen dat de wiskunde eigenlijk een springlevend vak is, waarin je ook nog wetenschappelijk onderzoek kunt doen. Soms overwint iemand zijn schroom, en vraagt wat ik zoal de hele dag als wiskundige doe. Dit soort vragen zou men niet zo snel aan een fysicus, chemicus of astronoom stellen. Bij hen is het duidelijk dat er werk aan de winkel is. Er rijzen beelden op van opstellingen, meetapparatuur en sterrenwachten waar mensen met witte jassen druk in de weer zijn.

Eeuwigheid

Maar wat moet je je bij een wiskundig onderzoeker voorstellen? Een wiskundige aan het werk zien is geen gezicht en de aanblik van iemand die al potlood kauwend voor zich uit staart, is weinig verheffend. Wiskundige aktiviteit is van buiten niet tot nauwelijks waarneembaar. Dat wil echter nog niet zeggen dat het er niet is. In werkelijkheid borrelt en pruttelt het van binnen bij de meeste wiskundigen, net als de retorts van de chemici. De objecten die door wiskundigen onderzocht worden, komen uit de wereld van de getallen, meetkundige figuren en hun abstracties, dingen die slechts bestaan in de geest van een wiskundige. Toch is er onder hen een opmerkelijke overeenstemming over de aard van deze objecten en men spreekt er over alsof het concrete voorwerpen zijn. Het is zelfs mogelijk om er onderzoek naar te doen en de consequenties daarvan kunnen uiterst merkbaar zijn, zelfs voor het dagelijks leven.

De natuurwetenschappen, zoals natuurkunde, scheikunde en sterrenkunde zijn gebaseerd op experimenten en waarnemingen. Elk nieuw experiment kan weer extra licht op bestaande kennis werpen, maar ook totaal omvergooien. Daardoor is het leven van bijvoorbeeld een natuurkundige uiterst onzeker. Hij moet orde zien te scheppen in de stoffelijke wereld om ons heen, zonder precies alle achterliggende mechanismen te kennen en met de wetenschap dat zijn theorie morgen


Frits Beukers

tallen

weer in duigen kan liggen. Ik heb grote bewondering voor natuurkundigen die in staat zijn om van al die onzekerheden toch iets moois te maken. Een prachtig klassiek voorbeeld daarvan vind ik het atoommodel van Niels Bohr uit 1913–1918, vlak voordat de quantummechanica losbarstte. Of Dirac's voorspelling uit 1930 van het bestaan van het positron op basis van zijn relativistische electrontheorie.

De wiskundige doet meestal niet aan experimenteren. Hij bouwt zijn eigen werkelijkheid op, meestal afgeleid van de bestaande werkelijkheid, en probeert daarin orde te scheppen. Die wiskundige werkelijkheid is een wereld van zekerheden en als iets in de wiskunde waar is, dan is dat voor eeuwig waar. Denkt u maar aan de stelling van Pythagoras. Die bestond 2500 jaar geleden al, en hij is nog steeds waar, ondanks alle ontwikkelingen in de moderne meetkunde. Wiskunde betekent letterlijk: de kunde van het gewisse, het zekere weten. De tijdloosheid van de wiskunde maakt dat lezing van het werk van Gauss of Eisenstein uit het begin van de 19e eeuw even verfrissend kan zijn als goede wiskunde uit deze eeuw. Vaak is het zelfs heel leerzaam om bij de studie van een wiskundig onderwerp terug te gaan naar de oorsprong, ook al is dat tweehonderd jaar geleden. Bij de bron ziet men het omliggende terrein en wellicht zijn daar nog waardevolle zaken te vinden die aanleiding geven tot iets nieuws. Dit heeft onder anderen tot gevolg dat wiskundebibliotheken hun tijdschriften van honderd jaar geleden nog steeds koesteren en niet zo gauw naar de kelder zullen verbannen.

Kille logica en formules

Zo ziet u dat wiskundigen nogal wat uit te leggen hebben. Aan de bibliothecarissen van de centrale bibliotheek, aan hun mede β-wetenschappers en ook aan al die mensen die beweren vroeger heel slecht in wiskunde te zijn geweest en er nooit wat van gesnapt hebben.

Dames en heren, dit is een openbare lezing waarvan ik graag wil dat met name niet-wiskundigen hem kunnen volgen, zelfs degenen die bang zijn van wiskunde. Daarom geen verhalen over diophantische vergelijkingen, elliptische krommen, p-adische differentiaalvergelijkingen en hypergeometrische functies. Dat zijn onderwerpen van wiskundig onderzoek waaraan ik de afgelopen jaren met plezier en met succes gewerkt heb. Met groot enthousiasme zou ik u daarover kunnen vertellen. Maar helaas zou ik u dan ook spoedig kwijt zijn, zelfs als ik mijn best zou doen om het voor een breed publiek begrijpelijk te houden. Dat zit nu eenmaal in de aard van de wiskunde, het is niet altijd eenvoudig. Ik zal de laatste zijn om dat te ontkennen. Ondanks dat bevat de wiskunde veel meer leuke en begrijpelijke kanten dan menigeen zich realiseert. In deze lezing wil ik u graag een paar van die leuke kanten laten zien. In het bijzonder zal ik u wat voorbeelden geven uit de getaltheorie, het vakgebied waarin ik tot nu toe het meeste onderzoekswerk heb verricht. Getaltheorie is het onderdeel van de wiskunde waarin men de gehele getallen bestudeert. De getallen $1, 2, 3$ enzovoorts dus. Dat is meestal niet moeilijk uit te leggen. Het moeilijkste deel is vervolgens uit te leggen dat men in deze tak van wiskunde zelfs professor kan zijn. Normaal gesproken krijg ik daar weinig kans toe, maar nu u allen hier uit vrije wil bent gekomen, grijp ik deze kans met beide handen aan. Hopelijk zult u na dit verhaal iets beter begrijpen wat iemand ertoe kan drijven om het wiskundevak te beoefenen en waarom iemand zo weg kan zijn van getallen. Het was trouwens bemoedigend om de laatste tijd reacties van mensen te krijgen die vertelden dat ook zij weg waren van getallen.

Om te beginnen wil ik een paar misverstanden omtrent de wiskunde uit de weg ruimen. Eén commentaar dat je als wiskundige wel eens krijgt is, “Wiskunde, dat is toch eigenlijk allemaal logica”. Er wordt nog net niet gezegd “kille logica”, daarmee de wiskunde reducerend tot een steriele wereld waarin alleen types als professoren Zonnebloem, Barabas en Sickbock kunnen overleven. Staat u mij toe dat ik hier even op in ga.


von Heun sogenannten „Lagrangeschen Zentralgleichung“:

$$(4) \qquad \sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{d}{dx}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial u_i'} \delta u_i\right), \qquad \left(u_i' = \frac{du_i}{dx}\right),$$

während für das n-fache Integral (3) übergeht in:

$$(5) \quad \sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}} \delta u_i\right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_n}} \delta u_i\right).$$

Figuur 1 Boven: een gedeelte uit een pianosonate van Mozart; beneden een gedeelte uit een wiskunde tekst van Emmy Noether.

Het is duidelijk dat als we iets beredeneren, wij de regels van de logica moeten gebruiken. Anders praten we onzin. Dat geldt op veel terreinen in ons leven, en zeker in de wiskunde. Maar daarmee is wiskunde nog geen logica. De regels van de logica zijn slechts spelregels. Het echte spel, dat van de wiskunde, moet nog beginnen. Neemt u ter vergelijking het populaire spel voetbal. De belangrijkste regel van dit spel zegt dat je de bal niet met de hand mag aanraken, tenzij je keeper bent. Daarnaast zijn er natuurlijk ook nog andere regels. Ondanks al die regels heb ik sommige voetballers tijdens een wedstrijd wondermooie dingen met de bal zien doen. Zo mooi, dat ze naar mijn mening werkelijk niet van deze aarde zijn. En dat zonder de bal met de hand aan te raken. Regels geven vorm aan een spel en binnen hun beperkingen is het daarna aan de spelers om er iets moois van te maken. Dat geldt ook voor het spel wiskunde. Er zijn wiskundigen die werk van buitenaardse schoonheid hebben gedaan, ondanks het feit dat ze gebonden waren aan de regels van die kille logica. En hoewel het publiek wat minder groot is dan dat bij voetbal, is het voor de kenners een genoegen om het werk van deze mensen te bewonderen.

Een ander commentaar van vergelijkbaar kaliber is: “Wiskunde, dat is toch allemaal formules”. Dit is een misvatting die berust op het feit dat men vorm met inhoud verwart. Staat u mij toe dat ik ook hier op in ga door een beeld te schetsen dat ooit eens door Henk Barendregt bedacht is. In figuur 1 vindt u onder elkaar een fragment uit een pianosonate van Mozart en een stukje wiskundetekst uit een artikel van Emmy Noether.

Beide fragmenten staan vol symbolen die voor de niet-kenners in beide gevallen even betekenisloos zijn. Muziekkenners zullen waarschijnlijk al snel de klanken achter de partituur herkennen en na enig gepuzzel de muziek in het hoofd kunnen doen herleven. Zelfs de niet-muziekkenners zullen erkennen dat er een groot verschil bestaat tussen de noten op het papier en het muzikale waarvoor zij staan. Het eerste is de vorm, het tweede is de inhoud. U voelt nu waarschijnlijk waar ik naar toe wil. Voor de wiskundetekst zou ik namelijk een soortgelijk verhaal kunnen houden. De formules in een goede wiskundige tekst zijn slechts uitdrukkingen van ideeën, en om die ideeën gaat het nu juist. Er zijn nog meer parallellen te vinden tussen muziek en wiskunde, getuige de vele citaten en geschriften die men in die richting kan vinden. Maar er zijn natuurlijk ook levensgrote verschillen. Eén zo'n verschil is bijvoorbeeld dat vrijwel iedereen wel eens muziek gehoord heeft, terwijl slechts weinigen de wiskunde ervaren hebben. Daarom heb ik u juist de twee fragmenten laten zien. Opdat u zich aan de hand van de één een voorstelling kunt maken van de ander. De uitspraak dat wiskunde allemaal formules is, heeft dus net zoveel waarde als de uitspraak dat muziek allemaal noten is, of dat schilderkunst alleen maar verf is.

Oneven huisnummers

Maar laat ik ophouden met u steeds te vertellen wat wiskunde *niet* is. Het is veel aardiger om eens te kijken naar wat het *wel* is. Het probleem is echter aan wie deze vraag gericht zou moeten worden. Als u tien wiskundigen vraagt wat wiskunde is, dan krijgt u waarschijnlijk ook tien verschillende antwoorden, ondanks het feit dat we in onze eerste jaars opleiding een vak “Wat is wiskunde?” hebben, en het University College Utrecht een cursus verzorgt met als werktitel 'Mathematics for poets'. De romanticus onder de wiskundigen zal de schoonheid van de wiskunde aanprijzen, de pragmaticus zal op de vele toepassingen wijzen, terwijl de cynicus u naar het woordenboek verwijst, aangezien iedere poging tot diepzinnigheid zijns inziens futiel zou zijn. Het probleem is namelijk dat vaak alleen collega-wiskundigen iemands visie op wiskunde zullen begrijpen. Daarom zal ik u op dit punt niet vermoeien met mijn visie.

Het is beter om u zelf te laten oordelen, en daarom wil ik gewoon wat wiskunde met u gaan doen. Dat is trouwens óók een riskante bezigheid. Het risico dat ik loop is dat u afhaakt en bevestigd zult worden in de vooroordelen over wiskunde als moeilijk en saai. Aan de andere kant vindt u het misschien wel leuk om te horen, en met die ijle hoop neem ik het risico dan maar.

Ik zal u een tweetal voorbeelden uit getaltheorie laten zien. De één is wiskundig gezien tamelijk eenvoudig, maar hopelijk aardig voor niet-wiskundigen. Het tweede begint op laag niveau maar zal uiteindelijk geavanceerde hulpmiddelen nodig hebben. In mijn presentatie wil ik zo duidelijk mogelijk zijn, dus vergeeft u mij als mijn uitleg soms wat pedant in de oren klinkt.

Hier is het eerste voorbeeld. U loopt op straat en bent op zoek naar huisnummer 85. Helaas, u heeft pech, want u bevindt zich weliswaar aan de zijde van de oneven nummers, maar wel bij nummer 1, aan het begin van de straat. Niets aan te doen, u wandelt gewoon richting nummer 85. Om de tijd wat te doden telt u de huisnummers, die u aan de oneven kant passeert, bij elkaar op. U moet hier nog 32 minuten zitten, dus ik denk dat er weinig anders te doen valt. U ziet hier het resultaat.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 1 & = & 1\times 1 \\ 1+3 & = & 4 & = & 2\times 2 \\ 1+3+5 & = & 9 & = & 3\times 3 \\ 1+3+5+7 & = & 16 & = & 4\times 4 \\ 1+3+5+7+9 & = & 25 & = & 5\times 5 \end{array}$$

We beginnen met 1. Bij 3 aangekomen hebben we $1+3=4$. Bij 5 aangekomen bedraagt de som al $1+3+5=9$ en als we de 7 passeren zitten we al op 16. De achtereenvolgende sommen zijn nu $1, 4, 9$ en 16. Wellicht komen deze getallen bekend voor. Het zijn namelijk allemaal kwadraten, $1\times 1, 2\times 2, 3\times 3$ en 4×4. Dat is opmerkelijk en men kan zich afvragen of dit zo doorgaat. We lopen door en bij 9 aangekomen krijgen we als som 25. En jawel, $25 = 5\times 5$. Het lijkt erop dat we hier het begin zien van een wetmatigheid die zich afspeelt in de wereld van de getallen. We formuleren dit als een stelling, die we de *Stelling van de huisnummers* zullen noemen. Hij luidt als volgt:

Kies een getal en noem dit n. Dan is de som van de eerste n oneven getallen een kwadraat, namelijk n^2.

U ziet hieruit dat het met getaltheorie net is als met humor, het ligt gewoon op straat.

Er is echter een probleem. We zijn er namelijk nog lang niet zeker van dat de som ook nog een kwadraat zal zijn als we bij nummer 85 aankomen. Of bij eventueel hogere nummers. Het lijkt er wel op, maar we zijn niet honderd procent zeker. Om er zeker van te zijn dat onze stelling voor àlle waarden van n geldt, moeten we een bewijs leveren. Elke stelling behoeft een bewijs. Onder een bewijs in de wiskunde verstaan we een redenatie die, met inachtneming van de regels van de logica, anderen ervan moet overtuigen dat een bepaalde bewering te allen tijde waar is. Het is duidelijk dat een bewijs aan de regels van de logica moet voldoen. Anders krijgen we onzin. Maar bovenal bevat een bewijs ook een creatief element, namelijk het inzicht in het waaròm van een bewering.

Zo'n nieuw inzicht of idee is een primaire en cruciale stap, want zonder idee is er ook geen bewijs. Je ziet regelmatig studenten, en ook amateurwiskundigen, eindeloos rondjes draaien binnen de hen bekende formulebrij en hopen dat er plotseling een stelling uitrolt. Maar zo werkt het niet. Om met Kurt Mahler [1] te spreken: Je moet eerst vlees in de molen stoppen voordat er gehakt uit komt. Een wijsheid, die niet alleen op de wiskunde van toepassing is.

Als je een wiskundig probleem wilt oplossen moet je dus eerst bedenken of je nog ergens een substantieel idee hebt, het denkbeeldige vlees dus, om in de molen te stoppen. Anders kun je wel ophouden. Hoe mensen op hun ideeën komen, is een nog onontgonnen terrein van onderzoek en creativiteit is nog steeds een onopgelost raadsel. Wat we wel weten, is dat het proces waarmee wiskundigen op nieuwe ideeën komen, niet alleen onbegrepen is, maar ook onstuurbaar, in tegenstelling tot wat beleidsmakers misschien denken.

Terug naar de stelling van de huisnummers. Het bewijs daarvoor is niet lastig, en een beetje middelbare schoolwiskunde is daartoe al voldoende. Ik zal het u besparen. Wel wil ik u het idee erachter laten zien. Dat bestaat uit een plaatje waarvan ik hoop dat het voldoende overtuigingskracht heeft. Ook dat is een riskante bezigheid. Wat de één overtuigend vindt, roept bij de ander alleen maar vraagtekens op. Maar ik probeer het toch. Links in figuur 2 ziet u een plaatje van het getal 16, dat we hebben voorgesteld als een vierkant dat bestaat uit 4 maal 4 kleinere vierkantjes.

Nu gaan we dit vierkant als een soort ui afpellen, van rechts boven naar links onder. Het resultaat ziet u rechts in het plaatje. U kunt de oneven getallen 1, 3, 5, 7 als aantallen in de achtereenvolgende schillen zien, een picturale voorstelling van $1+3+5+7=16$. Elke schil bevat twee vierkantjes extra vergeleken met zijn voorganger en we beginnen linksonder met een schil bestaande uit één vierkantje. Met andere woorden, we doorlopen de oneven getallen in de opeenvolgende schillen. Nu hoop ik natuurlijk dat u zich kunt voorstellen dat het ook zo gaat met andere vierkanten zoals 5 bij 5, 6 bij 6, etcetera. Met andere woorden, ik hoop dat u het gevoel heeft dat u dank zij dit plaatje begrijpt waarom onze huisnummers tot kwadraten optellen.

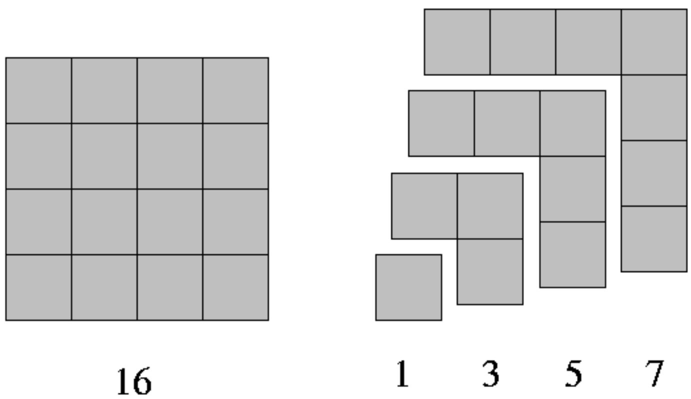
Zelf vond ik het plaatje erg overtuigend, maar mijn mentale beeld van de dingen hoeft natuurlijk absoluut niet overeen te komen met dat van u. Daarom is het nu mijn taak dit subjectieve inzicht te vertalen naar een echt bewijs, een correcte redenatie die uitgaat van vooraf afgeproken uitgangspunten en die voor iedereén overtuigend moet zijn, ook voor degenen die niet mijn mentale plaatje delen. Dit vertaalwerk moet men niet onderschatten. De weg die afgelegd moet worden van rauwe wiskundige intuïtie naar een logisch correcte redenatie is niet altijd makkelijk, zeker niet voor mensen die daar nog geen ervaring mee hebben. Het vereist flinke training, en dat is precies één van de dingen die we de universitaire wiskundestudenten in hun eerste twee jaar proberen mee te geven. Het vermogen om uit een probleem met een vage oplossing een heldere oplossingsstrategie te destilleren is een waardevolle, en één die ook in de wereld buiten de wiskunde goed bruikbaar is.

Het is misschien aardig om te vermelden dat de stelling van de huisnummers onder anderen wordt beschreven door de Griekse wiskundige Nicomachus uit het begin van onze jaartelling. Naast deze stelling heeft hij nog een aantal andere observaties die hierop voortborduren. Nicomachus gebruikte deze getallengrappen om zijn tijdgenoten te verbazen en in mysterie gedompeld te laten [2]. Hij hield namelijk de bewijzen van zijn observaties voor zichzelf.

Partities

Laat ik verder gaan met het tweede voorbeeld, dat eenvoudig begint. Stelt u zich eens voor. U zit aan tafel met voor u een stapel van tien losse guldens. Bij gebrek aan iets beters pakt u een aantal guldens van deze stapel, en zet deze in een nieuw stapeltje naast de oorspronkelijke, die nu wat kleiner is geworden. U heeft de stapel van tien in twee nieuwe stapeltjes verdeeld. Dat is fijn. Toch wil ik graag dat u nog even verder gaat, en uw guldens in nog meer stapeltjes opdeelt. Bijvoorbeeld in 2 plus 3 plus 5, of 4 plus 4 plus 2, of zelfs tien maal een stapeltje van 1 gulden. De mogelijkheden zijn legio.

Sommigen onder u zullen zich misschien afvragen op hoeveel manieren we onze tien gulden in stapeltjes kunnen verdelen. Dat kan ik u zeggen: op 42 manieren. Als u het niet gelooft kunt u het thuis op uw gemak natellen. We kunnen het ook anders zeggen. Elke opdeling van tien gulden in stapeltjes noemen we een *partitie*. Het aantal partities van tien is dus 42. In plaats van tien kunnen we elk ander getal nemen en vragen hoeveel partities dit getal precies heeft. Om een voorbeeld te noemen, het aantal partities van 100 is iets meer dan 190 miljoen, 190.569.292 om precies te zijn. Dat betekent dat we een stapel van 100 guldens op ruim 190 miljoen verschillende manieren in kleinere stapeltjes kunnen opdelen. Die aantallen partities nemen dus flink hard toe. Bovendien hebben ze de onhebbelijke eigenschap dat



Figuur 2 Een visueel 'bewijs' van de stelling van de huisnummers

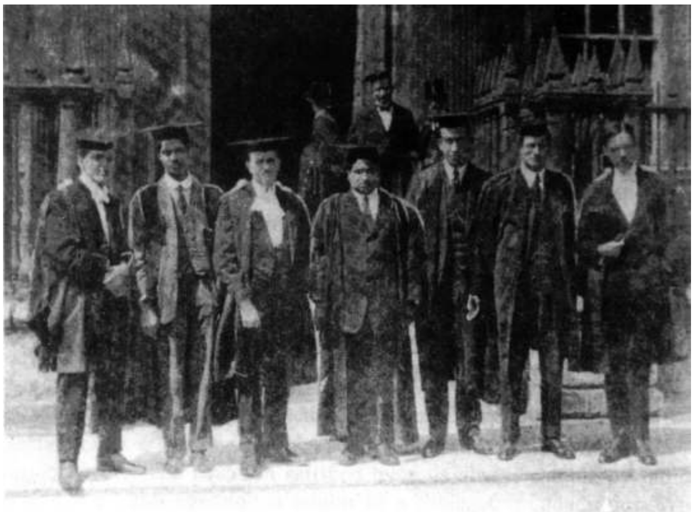


foto: Ramanujan, letters and commentary, blz. 137

Figuur 3 Ramanujan ten tijde van zijn promotie in Cambridge, 18 maart 1916. Ramanujan staat in het midden.

ze bijzonder moeilijk uit te rekenen zijn. Zeker als je geen computer tot je beschikking hebt. Leibniz merkte al op, dat de studie van deze aantallen partities zeer de moeite waard zou zijn. Maar ondanks deze belangstelling werden er weinig resultaten geboekt. De eerste die een wezenlijke stap vooruit zette was Euler, rond 1740. Daarna werd het weer wat stiller. Totdat rond 1913 de Indiase wiskundige Srinivasan Ramanujan op het toneel verscheen.

Ramanujan is één van de meest tot de verbeelding sprekende figuren uit de geschiedenis van de wiskunde. In eenvoudige omstandigheden in India opgegroeid, auto-didact, en zijn wiskunde, die van een bizarre schoonheid was, borrelde bijna letterlijk uit hem op. Hij werd ontdekt door de Engelse wiskundige Hardy die hem in de periode 1913–1919 naar Cambridge, Engeland haalde. Helaas ging Ramanujan's gezondheid snel achteruit en hij keerde spoedig naar India terug. Hij overleed in 1920 op 32-jarige leeftijd. In deze lezing kan ik jammer genoeg geen recht doen aan het levensverhaal en het werk van deze opmerkelijke wiskundige. Dat is wel prachtig gedaan in een documentaire van de BBC over Ramanujan en de biografie van Robert Kanigel [3], die ik iedereen kan aanbevelen.

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en modulaire vormen

Terug naar de partities. Ten tijde van Ramanujan was er een lijstje van de eerste tweehonderd partitie-aantallen, met ijzeren discipline opgesteld door Major MacMahon, een ex-artillerie-officier. U ziet hier een paar waarden uit deze tabel. Met $p(n)$ wordt het aantal partities van n aangegeven.

$$\begin{aligned} p(4) &= 5 \\ p(9) &= 30 \\ p(14) &= 135 \\ p(19) &= 490 \\ p(24) &= 1575 \\ p(29) &= 4565 \end{aligned}$$

Kijkend naar de gortdroge lijst vol met getallen, merkte Ramanujan iets bijzonders op. Het aantal partities van 4 is 5, en dus ook deelbaar door 5. Op zich niets bijzonders. Maar als we vijf getallen verder kijken, bij 9 dus, zien we dat het aantal partities van 9 gelijk is aan 30. Weer deelbaar door 5. Nog vijf stappen verder, dus bij 14, zien we dat het aantal partities van 14 gelijk is aan 135, ook deelbaar door 5. En dit gaat alsmaar door. Het aantal partities van een 5-voud plus 4 is blijkbaar steeds deelbaar door 5. De overige partitie-aantallen in MacMahon's tabel zijn meestal niet deelbaar door 5. Ramanujan had dus het begin van een nieuwe wetmatigheid in de getallenwereld gevonden, net zoals wij met de huisnummers eerder hebben gedaan. U zult misschien zeggen: En wat dan nog, zo bijzonder is het toch niet dat een paar getalletjes deelbaar zijn door 5? Dat valt inderdaad te bezien. In de praktijk van een getaltheoreticus gebeurt het vaak dat men regelmatige patronen in de getallenwereld tegenkomt. Soms zijn ze gemakkelijk te verklaren, zoals de som van onze oneven huisnummers. Bij sommige anderen gaat het wat moeilijker, of soms lukt het helemaal niet, wat je ook probeert. Onder die laatste categorie bevindt zich een aantal waarvoor zelfs een fundamenteel nieuw concept moet worden aangewend, of uitgevonden, om ze te begrijpen. Met deze categorie hebben we nu te maken. Ramanujan had tot taak om aan te tonen dat het aantal partities van *alle* 5-vouden plus 4 deelbaar is door 5, en niet alleen voor de getallen die in Major MacMahon's tabel voorkomen. Hiervoor had hij zijn volledige arsenaal aan kennis op het gebied van de *modulaire vormen* nodig.

Modulaire vormen waren in Ramanujan's tijd nog nieuw, maar het werd destijds wel duidelijk dat ze een steeds belangrijker rol in getaltheorie zouden gaan spelen. Ik zal hier niet uitleggen wat een modulaire vorm is en ik kan u verzekeren dat u dat niet erg vindt. Het begrip modulaire vorm is één van de vele begrippen waar men in de wiskunde mee werkt. Van buiten zijn ze onzichtbaar, u kunt ze niet in het hoofd van een wiskundige zien zitten. Toch zijn ze voor de wiskundige springlevend. Men werkt ermee alsof het concrete objecten zijn. U kunt zich enigszins een voorstelling hiervan maken als u bedenkt dat getallen, zoals 1,2,3, alleen maar bestaan omdat ze bij ú tussen de oren zitten. U zult een getal niet zo gauw op straat tegenkomen. Behalve dan de huisnummers, maar u zult het met mij eens zijn dat dit slechts cijfers zijn waarmee je een getal aangeeft. Het getal zelf kun je niet zien. Toch spelen getallen een belangrijke rol in ons leven. Zo belangrijk, dat het net is alsof ze echt zijn en we er niet bij stilstaan dat het alleen maar gedachtenspinsels zijn. Hetzelfde geldt voor wiskundige begrippen. Om u toch iets te laten zien van een modulaire vorm, heb ik het plaatje uitgekozen dat u in figuur 4 ziet [8].

Het is hetzelfde soort resultaat dat men krijgt als iemand gevraagd wordt om gevoelens als verdriet of blijheid in een schilderij uit te beelden. Het plaatje is in werkelijkheid een dodecaeder betegeling van de driedimensionale hyperbolische ruimte en heeft eigenlijk weinig met modulaire vormen te maken, behalve het hyperbolisch zijn van de ruimte waarin ze leven. Toch ademt dit plaatje naar mijn gevoel de sfeer van een modulaire vorm uit. Mysterieus, en oneindig symmetrisch. In de moderne getaltheorie zijn modulaire vormen onmisbaar. Martin Eichler schijnt eens gezegd te hebben dat er in de getaltheorie vijf belangrijke operaties zijn, namelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en modulaire vormen. En terecht. Hoewel modulaire vormen als mysterieuze wolken hoog boven ons dagelijks leven zweven, nauwelijks zichtbaar voor de meesten, geven ze grote delen van de getaltheorie een wondermooie geordende structuur. Af en toe werpen ze een voor iedereen zichtbare schaduw. Het bekendste voorbeeld daarvan was Andrew Wiles' recente bewijs van de Laatste Stelling van Fermat, waarin modulaire vormen een cruciale rol speelden. Of ze laten, zoals Ramanujan ontdekte, kleine sporen na in de vorm van deelbaarheidseigenschappen van partitie-aantallen.

Ramanujan ontdekte, behalve deelbaarheidseigenschappen door 5, ook andere deelbaarheden door de priemgetallen 7 en 11. Daarna bleef het lange tijd stil. Atkin ontdekte in de zestiger jaren soortgelijke fenomenen bij het priemgetal 13, maar verder was er weinig schokkend nieuws. Totdat twee jaar geleden de modulaire vormen weer toesloegen. De Amerikaanse wiskundige Ken Ono gebruikte eigenschappen van modulaire vormen om aan te tonen dat er deelbaarheidseigenschappen bestaan voor de partitie-aantallen met betrekking tot ieder willekeurig priemgetal, niet alleen voor $5, 7, 11$ en 13. Alleen zijn ze zo dun gezaaid dat we heel veel verder moeten gaan dan MacMahon's tabellen om ze te signaleren, en zelfs dan is het nog maar de vraag of we ze ooit experimenteel gevonden zouden hebben. De structuur die geleverd wordt door modulaire vormen was onmisbaar om achter het bestaan van die nieuwe deelbaarheden te komen. Om een voorbeeld te noemen, we weten nu dat het aantal partities van alle 115000-vouden plus 3474 deelbaar zijn door 23. Op het ogenblik wordt er hard gewerkt om de volledige patronen boven water te krijgen. De gereedschappen die daarbij gebruikt worden zijn een combinatie van de theorie van modulaire vormen samen met zoekacties gebruikmakend van de computer [4].

Experimenteren met computers

Het is niet geheel toevallig dat ik daarnet het woord computer heb laten vallen. Hiermee zijn we terecht gekomen op één van mijn lievelingsonderwerpen en ik zou er graag iets over zeggen.

Niet omdat het begrip ICT tegenwoordig in is, maar wel omdat ik computers prachtige apparaten vind en het spannend is om te zien wat hun rol gaat worden in de toekomstige wiskunde. Ik denk hier niet aan een computer als schoolmeester of doorgeefluik voor oefenopgaven, maar wel aan de computer als instrument om wiskunde te bedrijven. Sinds de introductie van wiskundepakketten, zoals Maple en Mathematica, zijn computers geen veredelde rekenmachines meer. Ze kunnen nu wiskundige objecten hanteren en ze op fraaie manier uitbeelden. De fractalplaatjes, waarvan u in figuur 5 een artistieke impressie ziet [9], zijn de bekendste voorbeelden van computerafbeeldingen van wiskunde objecten.

Deze ontwikkeling heeft zich in de laatste vijftien jaar afgespeeld. Dit is slechts een fractie van de afgelopen twee en half duizend jaar dat mensen de wiskunde beoefend hebben. Alleen al daarom is het nog veel te vroeg om te voorspellen wat de computer uiteindelijk voor de wiskunde gaat betekenen. Maar het is natuurlijk erg leuk om daarover te speculeren. Gaan we nog een revolutie meemaken? of blijft alles bij het oude?

Allereerst wil ik een wijdverbreid misverstand uit de wereld helpen, en dat is de gedachte dat computers het wiskundig werk van ons kunnen overnemen. Om een voorbeeld te geven, wil ik even teruggaan naar ons probleem van de oneven huisnummers. Een computer stelt ons in staat om ook voor heel hoge waarden van de huisnummers de juistheid van onze stelling te controleren. Als we bij het miljoenste huisnummer zijn aangekomen, heeft een computer geen enkele moeite om uit te rekenen dat onze som een miljoen in het kwadraat is geworden. Onze stelling geldt echter voor *alle* huisnummers, en dat zijn er oneindig veel. Een computer kan nooit een oneindig aantal gevallen controleren. Hij zou dan immers oneindig lang bezig zijn. Een wiskundig bewijs stelt ons in staat om met een eindig aantal woorden een oneindig aantal gevallen aan te pakken, en dat is één van de fraaie aspecten van de wiskunde. Het is nog lang niet zo ver dat computers in staat zijn zelfstandige bewijzen te leveren, als dat ooit gaat gebeuren. We leven weliswaar in een tijd dat men bijvoorbeeld DNA-soep aan het rekenen probeert te krijgen, maar de vooruitgang daarin lijkt nog zeer bescheiden. Mochten wiskunde-bewijzende computers ooit nog op het toneel verschijnen, dan is het duidelijk dat het hele wiskundelandschap op een onvoorstelbare manier veranderd gaat worden. Persoonlijk lijkt het mij niet prettig om tussen computers te leven die eensgezind beweren het Riemann-vermoeden opgelost te hebben, terwijl ikzelf kop noch staart kan zien aan hun bewijs, omdat ze niet in menselijke taal geschreven zijn. Maar wie weet heeft de wiskunde tegen die tijd weer andere charmes gekregen.

Ook zonder dat computers aan het bewijzen slaan, kunnen we nog een interessante tijd gaan beleven. Waar computers tegenwoordig met name goed in zijn, is dat ze ons ongekende hoeveelheden experimenteel materiaal kunnen leveren. Pioniers als Felix Klein moesten vroeger dagen rekenen om een voorbeeld van een geschikte modulaire vorm te vinden. Nu is dat in een oogwenk gebeurd. Dat is al heel revolutionair. Op deze manier is de computer een machtig instrument om voorbeelden van wiskundige objecten binnen ons bereik te brengen. We kunnen veel verder kijken dan onze collega-wiskundigen honderd jaar geleden. Graag mag ik de introductie van de computer in de wiskunde vergelijken met de introductie van de telescoop in de sterrenkunde. Die vergelijking gaat natuurlijk niet helemaal op, maar op bepaalde punten vind ik hem wel aardig. Een saillant detail is bijvoorbeeld dat sommige 17e eeuwse astronomen weigerden door Galileï's telescoop te kijken. Vandaag de dag zijn er sommige wiskundigen die op hun beurt niet aan de computer willen. In beide gevallen zal men daar vast wel goede redenen voor hebben gehad. Natuurlijk hoeven ook niet alle wiskundigen aan de computer, want zo'n apparaat is lang niet bij alle wiskunde disciplines inzetbaar. Dat ligt aan de aard van die disciplines en niet aan de aard van hun beoefenaren.

Bij wiskundig werk overkomt het mij regelmatig dat ik voor een keuze sta. Namelijk: zet ik de computer aan het rekenen, of kan ik beter even mijn hersens gebruiken? Het gevaar met computers bestaat er in, dat men zich verliest in rekenwerk, en daarbij vergeet na te denken. Hierin een goed evenwicht bereiken is een vaardigheid die men zich moet aanleren. Het staat buiten kijf dat wiskundestudenten moeten leren de kracht van de computer te benutten bij het bedrijven van wiskunde. Maar het is even belangrijk dat studenten leren op de goede

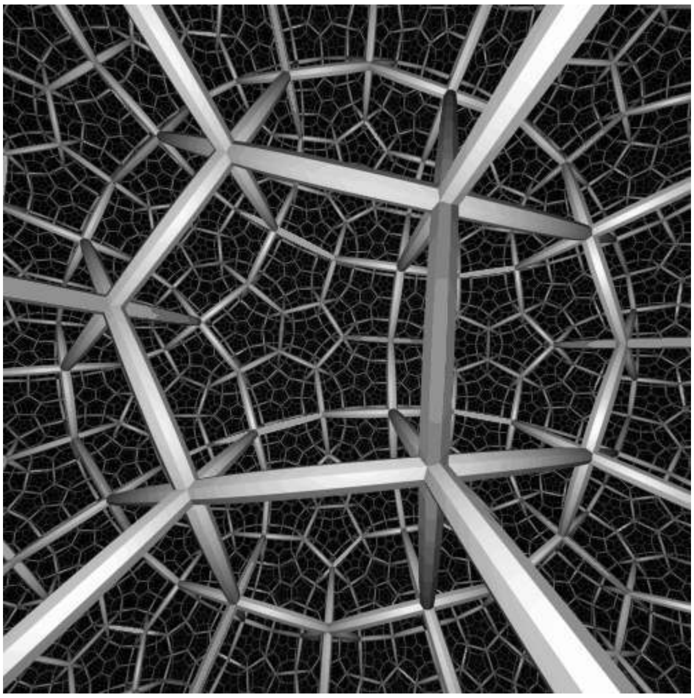


foto: http://www.geom.umn.edu

Figuur 4 Een artistieke impressie van een modulaire vorm

Figuur 5 Janet Parke won met de fractal *Taupensky* de ontwerpwedstrijd *Fractal Art '99*.

momenten de computer niét te gebruiken. Met deze keuzevrijheid worden de middelbare scholieren ook al geconfronteerd. Ook zij moeten leren wanneer er nagedacht moet worden, of wanneer er naar de rekenmachine, al of niet grafisch, gegrepen moet worden. Dat laatste heeft helaas de overhand. Tegenwoordig kom ik regelmatig studenten tegen die bij de cosinus van 60 graden liever het rekenapparaat pakken dan aan een tekendriehoek denken. Ook bij wiskundetentamens die gemakkelijk zonder rekenmachine gedaan kunnen worden, voelen sommige studenten zich moreel gesteund als ze zo'n apparaat naast zich hebben, al is het alleen maar als digitale fopspeen.

En zo, dames en heren, zijn we langzamerhand op onderwijsgebied aangekomen. In de Utrechtse universitaire onderwijswereld is de afgelopen jaren enorm veel overhoop gehaald, en gaat er de komende tijd nog heel veel overhoop gehaald worden. Mijn collega's weten er alles van, en ik zal mijn overige toehoorders er niet mee vermoeien.

Een punt van blijvende zorg is het te kleine aantal studenten dat jaarlijks de weg naar een universitaire wiskunde opleiding vindt. Een belangrijke factor bij het opwekken van wiskundebelangstelling is de beeldvorming van de wiskunde bij toekomstige studenten. Daarin spelen de ontwikkelingen op het vwo een bijna allesbepalende rol. Ook in het vwo wiskundeonderwijs is recentelijk heel veel veranderd. Het oude wiskunde B programma is nu vervangen door de tweede fase wiskunde B1,2. Een blik op de eindtermen leert dat deze tweede fase wiskunde bestaat uit een ambitieuze lijst van onderwerpen met een enorme variatie. Daar zitten hele leuke onderwerpen bij, ook wat stokpaardjes van deze of gene, en het wiskundige bewijs is weer in ere hersteld en wordt onderwezen aan de hand van de vlakke meetkunde in de tweede fase. Verder is er ook een lijst van verplichte vaardigheden, die een eerste- of tweedejaars wiskundestudent niet zouden misstaan. Dit is de theorie. Nu de praktijk. Die moet leren of deze wenslijst niet al te ambitieus is. Reeds nu al verschijnen er oekazes uit het ministerie dat bepaalde onderwerpen niet meer verplicht zijn. Uit het onderwijsveld komen ook al verontrustende berichten en het is te verwachten dat het laatste woord over de tweede fase nog lang niet gesproken is.

Schoolwiskunde

Om in ieder geval een beetje op de hoogte te blijven van wat onze eerstejaars studenten aan wiskunde hebben gehad, had ik de gewoonte om jaarlijks even naar het vwo examen wiskunde B te kijken. Dat deed ik dit jaar ook. Het heet nu wiskunde B1,2, en met enige verbazing heb ik de effecten van de tweede fase mogen aanschouwen. Als we het recente examen als representatief mogen beschouwen, moeten we concluderen dat de zogenaamde context opgaven en realistische wiskunde ook bij de 'harde' wiskunde B hun intrede hebben gedaan en een belangrijke rol spelen. Bijkbaar had ik iets gemist bij het doorlezen van de eindtermen. Een voorbeeld van een realistische wiskunde opgave [5] is een stuk geschreven tekst waarin een actueel onderwerp van stal wordt gehaald, bijvoorbeeld de werking van een medicijn uit de farmaceutische industrie, met daarbij illustratiemateriaal in de vorm van een tabel of grafiek. Vervolgens is het de bedoeling dat daar wiskunde achter wordt gezocht. Nu ben ik van mening dat men wiskunde weinig in het dagelijks leven tegenkomt. Of beter gezegd, achter alle moderne technische verworvenheden zit wel veel wiskundig denkwerk, denkt u maar aan de chips in uw computer of televisie, maar die wiskunde zit zo diep verborgen dat het niet zichtbaar is. Het gevolg is dat er hard gezocht moet worden naar een wiskundige draai aan het verhaal en dat wil nog wel eens koddige, of geforceerde situaties opleveren. Bij het vraagstuk dat ik net aanhaalde, was de uiteindelijke vraag om een e-macht te integreren en ook om de integratie nog eens numeriek over te doen in een achttal stappen. Met andere woorden, het hele verhaal over de farmaceutische industrie was niet meer dan een rijstebrij-berg waar je je eerst doorheen moest eten, voordat je aan de wiskunde toekomt. Dat verhaal had de leerling net zo goed kunnen overslaan.

Graag wil ik een opmerking maken over wiskunde en zogenaamde realistische wiskunde. Op de basisschool is realistisch rekenen een relatief nieuwe vorm van rekenonderwijs die kinderen niet alleen mechanisch leert rekenen, maar die het rekenen ook aan situaties in het dagelijkse leven koppelt. De meeste kinderen krijgen in hun latere leven dagelijks te maken met getallen in de vorm van gewichten, hoeveelheden, prijzen, enzovoort. Het is natuurlijk uiterst nuttig als ze op dergelijk gebruik worden voorbereid.

Op de middelbare school leren kinderen hun eerste wiskunde. Bij het aanleren van sinus, cosinus en logaritme kan men nog gemakkelijk praktijkvoorbeelden aanhalen om dit aanschouwelijk te maken. Maar bij het stijgen van het wiskundeniveau wordt het gaandeweg moeilijker om dit op de manier van het realistisch rekenen te onderwijzen want, zoals ik net zei, zoveel wiskunde zit er niet in het dagelijks leven. Ik krijg echter de indruk dat men probeert de wiskunde voor zoveel mogelijk leerlingen leuk, of in ieder geval nuttig, te maken door toch aan de realistische zienswijze vast te houden. En die zegt: kijkt eens wat je allemaal met die wiskunde kunt doen. Is het geen mooi vak, overal kom je het tegen!

Natuurlijk ben ik niet afkerig van enige context in de wiskunde. Vooral bij het uitleggen van wiskunde is dat wel eens handig. Het voorbeeld van de huisnummers heb ik gebruikt om de stelling van de huisnummers bij u te introduceren. Het zal u allen duidelijk zijn geweest dat het daarbij uiteindelijk ging om de sommen van oneven getallen, en niet om het feit dat u nu zo handig huisnummers kunt optellen. Verder weet ik ook heel goed dat de wiskunde enorm veel toepassingen heeft. Daarvoor hoef ik alleen maar naar het werk van mijn collega's in de toegepaste wiskunde te kijken. Vaak bestaat dit werk uit het opstellen en uitwerken van wiskundige modellen. Bijvoorbeeld modellen voor de waterhuishouding in Nederland, de weersvoorspelling, oceaanstromen of de verkeersstromen op onze snelwegen. Toegepast wiskundigen hebben veel contacten met industrie en bedrijfsleven en bewijzen daar fraaie diensten. Maar modellering van praktische situaties is een niet te onderschatten kunst en er is een flinke portie wiskundige vaardigheid voor vereist. Die vaardigheid doe je op door gewoon wiskunde te bestuderen. Op de ouderwetse manier, zonder enige poespas.

Ontdaan van alle franje

Het is, denk ik, een illusie te veronderstellen dat leerlingen wiskunde leuker gaan vinden als je het verpakt in zogenaamde realistische sommetjes. Werkelijke motivatie voor wiskunde komt namelijk uit de wiskunde zelf. Laat ik u een voorbeeld geven. De laatste twintig jaar is het zelfs de getaltheoretici overkomen dat hun vak plotseling praktische toepassingen heeft gekregen. Dat was even schrikken, want sinds G.H. Hardy [6] heeft gezegd dat hij in zijn leven niets nuttigs heeft gedaan, dachten we dat getaltheorie de zuiverste van de zuivere wiskunde was. Het bleek echter anders te lopen. De moderne cryptografie, of geheimschriftkunde, berust sinds 1976 op de getaltheorie. Cryptografie is de techniek die ervoor moet zorgen dat de privacy van ons electronische dataverkeer is verzekerd. Maar niet alleen daarvoor. In het spannende boek van Simon Singh [7] kunnen we lezen dat cryptografie soms van beslissende invloed is geweest bij internationale conflicten en nationale veiligheid. De moderne technieken uit de cryptografie zijn afkomstig uit de getaltheorie. De stellingen die daaraan ten grondslag liggen, zijn lang geleden gevonden door mensen die geen idee hadden dat ze nog eens toegepast zouden worden. Hun motivatie was pure nieuwsgierigheid naar getallen en hun eigenschappen. En dat geldt nog steeds. Een aantal van mijn collega's is geheel of gedeeltelijk werkzaam in de cryptografie. Maar geen van hen vindt getaltheorie zo leuk omdat je er cryptografie mee kunt bedrijven. De motivatie is altijd de pure wiskunde en het plezier om getaltheoretische problemen te kraken. Voor de wiskundigen die als toegepast wiskundige door het leven gaan, geldt denk ik hetzelfde. Zij kunnen vele succesverhalen vertellen over zelfbedachte technieken die ergens een mooie toepassing hebben gevonden. Soms ben ik daar zelfs jaloers op. Degenen die ik erover sprak, vertelden mij echter dat het niet leuk is om alleen maar succesvolle toepassingen op te sommen. Ook voor hen geldt dat de smaak van de overwinning op een lastig wiskundig probleem meer waard is dan het vooruitzicht dat hun werk kan worden toegepast. Het is de wiskunde zelf, die het interessant maakt om wiskunde te bedrijven.

Ontdaan van alle franje komt de wiskunde het beste uit de verf en kan men zien hoe helder ze in elkaar zit. Daarin bestaat haar grote aantrekkingskracht. Als de ware aard van de wiskunde verstopt wordt in realisme en contexten, dan loopt men grote kans dat gemotiveerde vwo-leerlingen het niet meer leuk vinden. Die zouden in de veronderstelling kunnen komen dat wiskunde een vak is, waarbij je je door rijstebrijbergen van context moet worstelen alvorens tot zaken te komen, waarin per se alles nuttig moet zijn, vooronderstellingen onduidelijk, en waarin een grafische rekenmachine je steun en toeverlaat is. Zouden die leerlingen het dan nog wel leuk vinden, die wiskunde? En zouden ze, onterecht denkend dat dit hun wiskundige voorland is, nog wel een wiskundestudie willen beginnen? Ik hoop natuurlijk dat ze dat nog steeds willen, maar ik houd mijn hart vast.

In deze lichte mineur eindig ik mijn rondwandeling met u door de wiskunde. Ondanks alle bestuurlijke rompslomp, onderwijsperikelen en conjunctuurverschijnselen is de wiskunde altijd zichzelf gebleven. Klaar om een ieder te fascineren die daar oog voor heeft. Ook in de toekomst zal dit zo blijven en met die gedachte zou ik mijn verhaal willen afronden.

Referenties

1 A.J. van de Poorten, *Notes on Fermat's Last Problem*, p41, Wiley 1996.

2 M.L. D'Ooge (trs.), *Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic* New York, 1926.

3 R. Kanigel, *The man who knew Infinity*, Scribnet's/Macmillan 1991.

4 S.Ahlgren, K.Ono, Addition and Counting: The arithmetic of Partitions, Notices of the AMS 48(2001), 978-984.

5 Eindexamen vwo B1,2 2001. Zie *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/2 nr. 2, 148–155, 2001

6 G.H. Hardy, *A Mathematician's Apoloogy*, Cambridge University Press 1940.

7 S. Singh, *The Code Book*, Fourth Estate, London 1999.

8 Hyperbolic SpaceL: Poster of the NotKnot Video of the Geometry Center. *http://www.geom.umn.edu*. Reproduced with permission by the University of Minnesota Geometry Center.

9 Fractal by Janet Parke, *Taupensky*, winner of category Abstract in the Fractal Art 1999 contest. http://www.fractalus.com/contest99/entries/entry-331.htm Reproduced with permission by Janet Parke.