

Geertje Hek

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
ghhek@science.uva.nl

David Iron

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
diron@science.uva.nl

Studiegroep wiskunde en de industrie

Oververhitte vissen in Artis

Tijdens de Studiegroep Wiskunde met de Industrie in februari jongstleden was een van de problemen waaraan gewerkt werd afkomstig van Artis. Bij het Artis aquarium heeft men in de zomer problemen om het water in de mammoettank op de juiste temperatuur te houden. De Studiegroep werd gevraagd te zoeken naar een oplossing die de vissen de nodige verkoeling kan bieden.

De mammoettank bevat ruim 400.000 liter zeewater van idealiter 24 graden Celsius. Als het 's zomers buiten warmer dan 25 graden wordt, neemt de temperatuur van het water soms toe tot 27 graden Celsius. De warmte die door het water opgenomen wordt is afkomstig van de lampen en van de zon. Bij het oplossen van het probleem moest rekening gehouden worden met de kosten, het monumentale pand waaraan maar weinig veranderd mag worden en natuurlijk met de gezondheid van de vissen.

Voor de hand liggende koelmethoden waren of al door Artis uitgeprobeerd (zoals koeling met een kuub ijs — een onhandige en dure methode omdat het ijs van gedestilleerd water moet zijn) of onuitvoerbaar (zoals koeling met een koelelement — een metalen koelelement in het zoute water zou de chemische samenstelling van het water beïnvloeden).

Om het probleem op te lossen dacht de Studiegroep eerst aan een beschrijving van de dynamica in en rond de waterbakken met behulp van warmtevergelijkingen en vloeistofmechanica. Maar uiteindelijk bleek de energiebalans in het hele systeem de sleutel tot de oplossing te zijn.

Feiten over het probleem

Het Artis aquarium bestaat uit diverse zoet- en zoutwataquaaria met verschillende temperaturen en diverse groottes. Voor het modelleren van het probleem is alleen de grootste tank in beschouwing genomen, de zogenaamde mammoettank. Dit is de warmwatertank die verreweg de grootste hoeveelheid water bevat, en dus het moeilijkst is af te koelen tot de juiste temperatuur. Deze tank is $5 \times 2,5 \times 20 \text{ m}^3$ groot en staat in verbinding met een groot

Energiebronnen en -putten	
Q_S	zonne-energie
Q_L	energie van lampen
Q_{ET}	verdamping vanuit tank
Q_{CT}	geleidingswarmteverlies uit tank
Q_{ER}	verdamping vanuit reservoir
Q_{CR}	geleidingswarmteverlies uit reservoir
Constanten en variabelen	
λ_S	fractie van zonne-energie geabsorbeerd door water
λ_L	fractie van lampenergie geabsorbeerd door water
T_1	watertemperatuur in tank
T_2	watertemperatuur in reservoir
ΔT	temperatuursverandering

Tabel 1 De in het model gebruikte variabelen en constanten.

reservoir waarin het water zuurstof kan opnemen uit de lucht. In totaal bevat het mammoetsysteem 440.000 liter water. Het water in het systeem wordt rondgepompt met een circulatietijd van ongeveer 4 uur. Hoewel het water volgens de Artiskundigen in het hele systeem dezelfde temperatuur zou hebben, bleek er bij nameting een cruciaal temperatuurverschil van 0,1 graad Celsius te zijn tussen de tank en het reservoir in de catacomben.

Energiebalans

Voor de beschrijving van de energiebalans is het systeem beschouwd als twee deelsystemen, namelijk de tank en het reservoir. In de tank zijn het zonlicht en de lampen direct boven het water de energiebronnen. De energie wordt opgeslagen in het water, wat een verhoging van de temperatuur oplevert, of via verdamping of warmtegeleiding door het glas en de muren afgestaan aan de omringende lucht. Het water in het reservoir verliest warmte door verdamping en door warmtegeleiding naar de bodem.

De energiebalans in de tank wordt gegeven door

$$\lambda_S Q_S + \lambda_L Q_L = Q_{ET}(T_2) + Q_{CT}(T_2) + \theta \Delta T, \quad (1)$$

waar de term $\theta \Delta T$ de energie is die opgeslagen wordt in het water als de temperatuur in de tank met ΔT graden stijgt. De energiebalans in het reservoir is

$$\theta \Delta T = Q_{CR}(T_1) + Q_{ER}(T_1). \quad (2)$$

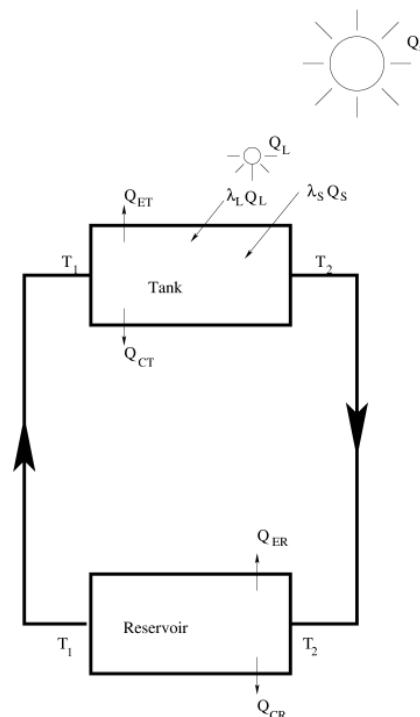
De afname van temperatuur in het water correspondeert met energieverlies door verdamping. Schematisch is de situatie zoals in figuur 2.

Aannames

Uit waarnemingen in het aquarium blijkt er nauwelijks verdamping op te treden in de tank, terwijl er veel verdamping plaatsvindt in de reservoirs. Dit rechtvaardigt de benadering $Q_{ET} = 0$ en $Q_{ER} = Q_{\text{total}}$. Die totale verdampingsenergie kan worden berekend met behulp van de informatie dat er wekelijks 2 m³ water uit het systeem verdampt, en blijkt ongeveer 6 kW te zijn. De waarneming dat $\Delta T = T_1 - T_2 \sim 0.1$ graad Celsius, leidt tot de aanname $T_1 \sim T_2 \sim T$, die we later met behulp van (2) zullen



Figuur 1 Het aquariumgebouw van Artis bij de opening (1886–1887). Het honderdtwintig jaar oude gebouw heeft architectonische waarde, maar is sterk verouderd.



Figuur 2 Energie-input en -output in tank en reservoir.

valideren. Met deze aannames kunnen (1) en (2) vereenvoudigd worden tot

$$\lambda_S Q_S + \lambda_L Q_L = Q_{CT}(T) + Q_{CR}(T) + Q_{ER}(T). \quad (3)$$

Hiernaast nemen we ook aan dat de energie hoofdzakelijk aan het systeem wordt toegevoegd door straling, en dat energieverlies buiten de verdamping om voornamelijk door geleiding plaatsvindt. Deze aannames zijn gebaseerd op het feit dat nauwelijks enige convectie is waargenomen.

Details

Om de verschillende termen in (3) te schatten blijkt de oude, vertrouwde Binas van onschatbare waarde. Hierin vindt men warmtegeleidingscoëfficiënten, warmtecapaciteiten en andere kenmerken van stoffen in onze omgeving. De diverse factoren worden daarmee als volgt geschat.

- *Lampen*: het vermogen van de lampen is totaal 10 kW; geschat wordt dat bijna alle energie van de lampen als warmte in het water verdwijnt, dus $\lambda_L \sim 1$.
- *Zon*: Plancks wet voor black body straling en het feit dat de helft van de straling naar beneden (water) gericht is, leveren

$$Q_S \sim \frac{\sigma}{2} (T_{\text{roof}}^4 - T^4) A \sim 10 \text{ kW}. \quad (4)$$

Hierin is $\sigma = 5.6 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ de Stefan-Boltzmann constante, T_{roof} de temperatuur net onder het dak ($T = 323 \text{ K}$ op warme dagen) en $A = 5 \times 20 \text{ m}^2$ het wateroppervlak van de tank. Voor de watertemperatuur is $T = 298 \text{ K}$ genomen. In de berekeningen gaan we uit van $\lambda_S = 0,5$.

Merk op, dat de orde van grootte gelijk is aan die van de lamp-energie (zelfs op extreem warme dagen, wanneer $T_{\text{roof}} = 333 \text{ K}$, is $Q_S \sim 20 \text{ kW}$).

- *Geleiding tank*: de warmtegeleiding van de 10 cm dikke glazen wand is $\mu_T = k \frac{A}{d}$ met k de warmtegeleidingscoëfficiënt, A de oppervlakte van de wand en d de dikte. Dit leidt tot een relatie voor Q_{CT} die afhangt van de omgevingstemperatuur T_{amb} :

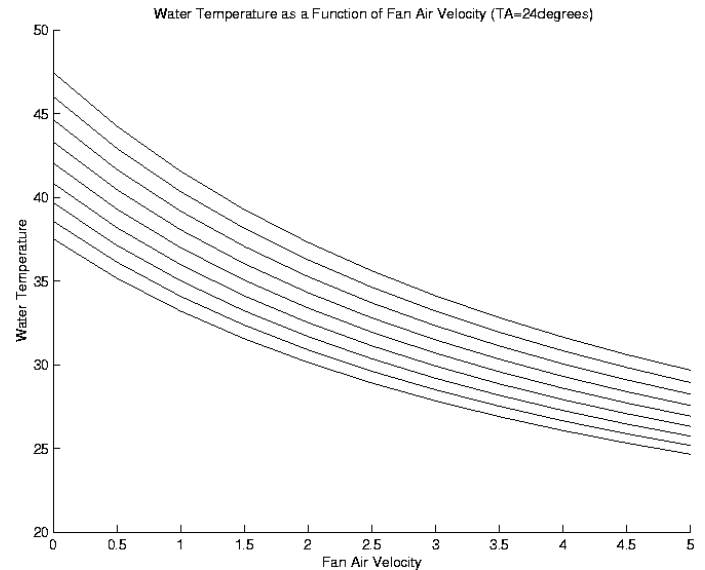
$$Q_{CT} = \mu_T(T - T_{amb}) = 0.93 \times 50/0.1(T - T_{amb}) \sim 0.5(T - T_{amb}). \quad (5)$$

- *Geleiding reservoir*: ter vereenvoudiging stellen we ons het rechthoekige reservoir voor als een halve bol. Dit leidt tot een overschatting van het energieverlies in de grond, dat echter wel van de juiste orde is. Voor een schatting van de warmtegeleiding van de wand en de grond rond het reservoir nemen we aan dat het temperatuurprofiel rond de halve bol gegeven wordt door

$$T_S(r) = \frac{T - T_{soil}}{r} R + T_{soil} \quad \text{voor } r > R.$$

Hier is T de watertemperatuur, T_{soil} de bodemtemperatuur ver van het reservoir, r de afstand tot het middelpunt en R de straal van het reservoir. We nemen $R = 10$ en schatten T_{soil} op 16 graden Celsius. Het verlies door warmtegeleiding in de grond is dan

$$Q_{CR} = -k(2\pi R^2) \left. \frac{\partial T_S}{\partial r} \right|_{r=R} = 2\pi Rk(T - T_{soil}). \quad (6)$$



Figuur 3 Hogere lijnen corresponderen met een hogere temperatuur vlak onder het dak door de zon.

Substitutie van constanten levert een verlies van ongeveer 0.5 kW bij een watertemperatuur van $T = 27$ graden Celsius op.

- *Verdamping*: we nemen aan, dat lucht met een luchtvochtig-



Binnenaanzicht van het aquarium (begane grond)

heidsgraad van 80% bij de reservoirs binnenkomt (typische conditie voor Amsterdam in de zomer) en volledig verzadigd via de ventilator naar buiten gaat. Het energieverlies door verdamping wordt dan gegeven door

$$Q_{ER} = \frac{1}{2} \frac{pp(T)}{p_{\text{atmos}}} \rho A V L, \quad (7)$$

waarin $pp(T)$ de deeldruk van waterdamp is bij temperatuur T (bij 30 graden Celsius ~ 4.24 kPa), ρ de dichtheid van verzadigde lucht (~ 1.3 kg/m³), p_{atmos} de luchtdruk van de atmosfeer (~ 100 kPa), L de hoeveelheid energie die de lucht wint als water verdampt ($\sim 22.6 \times 10^5$ J/kg), A het oppervlak van de ventilator (~ 0.04 m²) en V de snelheid van de lucht in de

ventilator (en boven het water). Deze vergelijking geeft dat de verdamping van 2 m³ water per week in de zomer overeenkomt met een luchtsnelheid van 2.4 m/s.

Controle

We vergelijken onze berekeningen tot dusverre met de energiebalans voor het reservoir, om te kijken of de geschatte geleiding en verdamping tot een correcte ΔT leiden. In de vergelijking (2), $\theta \Delta T = Q_{CR} + Q_{ER}$, is $\theta \sim 10^5 \text{WK}^{-1}$ de hoeveelheid energie die nodig is om het water gedurende de cyclus van 4 uur een graad



Binnenaanzicht van het aquarium (eerste verdieping)

te verwarmen. Met $Q_{ER} = 6$ kW en $Q_{CR} = 0.5$ kW vinden we $\Delta T = 0.065$ graden Celsius, de juiste orde van grootte. Dit geeft vertrouwen in onze schattingen en de aanname $T_1 \sim T_2 \sim T$.

Eindresultaat

Substitutie van (4), (5), (6) en (7) in (3) geeft de volgende vergelijking, die de watertemperatuur relateert aan de omgevingstemperatuur T_{amb} , het hitte-effect van de zon (via T_{roof}) en de luchtsnelheid V bij het reservoir.

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{2} (T_{\text{roof}}^4 - T^4) A + 10 \\ &= \mu_T (T - T_{\text{amb}}) + \frac{1}{2} \frac{pp(T)}{p_{\text{atmos}}} \rho A V L + \mu_R (T - T_{\text{soil}}). \end{aligned}$$

De laatste vereenvoudiging is een linearisatie van $pp(T)$ rond $T = 30$ graden Celsius. Het resultaat is een duidelijke relatie tussen T en de drie parameters T_{amb} , T_{roof} en V . Het blijkt dat V de belangrijkste sleutel is voor koeling, zie figuur 1. De Studiegroep adviseert Artis dus om niet in eerste instantie te proberen hitte tegen te houden door bijvoorbeeld isolatie, maar om het verlies van energie in de catacomben in de zomer te bevorderen met een snellere luchtstroom boven het reservoir, ofwel betere ventilatie. Een oplossing die vergelijkbaar is met de oplossing die veel mensen gebruiken om hun kopje hete koffie of thee sneller te laten afkoelen.



Deelnemers van de studiegroep bestuderen het bovenaanzicht van het tropisch aquarium op de eerste etage (de mammoettank).