UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Zij $f(t)$ een monisch polynoom in de variabele t van oneven graad n en met gehele coëfficiënten; we nemen bovendien aan dat $f(0) = -1$. Zij p een priemgetal. Bewijs dat $f(t^2)$ *reducibel* is modulo p, dat wil zeggen, er bestaan niet-constante monische polynomen $g(t)$ en $h(t)$ zodanig dat: $f(t^2) = g(t)h(t) \mod p$.

Opgave B

Bewijs dat op de kubus van Rubik niet drie hoeken kunnen worden verwisselend door met slechts twee zijvlakken te draaien.

Opgave C

Bewijs dat
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log n}{\log\log n} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\frac{1}{2}x}{\sinh \frac{1}{2}x}\right)^{n/2} \frac{\log x}{x^2-1}\, dx \;=\; 1.$$
Hierin stelt $\log\log n$ de geïtereerde natuurlijke logaritme voor.

Ster-opgave

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ definiëren we de functies $\phi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ door
$$\phi_n(x) := (2n)^x - (2n-1)^x + (2n-2)^x - (2n-3)^x + \cdots + 2^x - 1^x.$$
Bewijs of weerleg dat voor alle $x \in \mathbf{R}$ en voor alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ geldt dat:

1. $\phi_n'(x) > 0$;
2. $\phi_n''(x) > 0$.

Hoe zit het met de hogere afgeleiden?

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend. Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 mei 2002. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Editie 2001/3

Op de ronde 2001/3 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we 7 inzendingen. Tot dusver hebben we geen oplossingen van de ster-opgave ontvangen.

Opgave 2001/3-A

Toon aan dat voor alle positieve gehele n er een permutatie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ van $1, 2, \ldots, n$ bestaat zo dat $a_j \mid \sum_{i=1}^{i=j} a_i$ voor alle $j = 1, \ldots, n$. Voorbeeld: voor $n = 9$ is 8 4 3 5 1 7 2 6 9 een dergelijke permutatie. Bepaal zoveel mogelijk (oneindige) series van dergelijke permutaties.

Oplossing De volgende uitwerking is gebaseerd op de oplossingen van Roelof Oosterhuis (deel 1) en het team Steven Delvaux/Hendrik Hubrechts (deel 2).

Deel 1 Voor $n = 2k$ nemen we
$$\begin{cases} a_{2i} &= i \\ a_{2i-1} &= i + k \end{cases} \qquad \text{voor } i = 1, \ldots, k.$$
Zo verkrijgen we rijtjes $a_1, \ldots, a_{2k}$ van precies de getallen $1, \ldots, 2k$. Dit geeft als sommen $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. Met inductie vinden we:
$$\begin{cases} s_{2i} &= i(i + k + 1) \\ s_{2i-1} &= i(i + k) \end{cases} \qquad \text{voor } i = 1, \ldots, k.$$

Er geldt dus voor zowel even als oneven a_j dat $a_j | s_j$. Voor $n = 2k+1$ kiezen we dezelfde serie als voor $n = 2k$, alleen voegen we het element $a_{2k+1} = 2k+1$ toe. Er geldt nu opnieuw dat $a_{2k+1} | s_{2k+1}$.

Deel 2 We geven een methode waarmee oneindig veel series kunnen worden gegenereerd. We maken gebruik van de notatie zoals we die hierboven hebben geïntroduceerd: $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$. Stel $s_j = a(b-1)$, dan kunnen de elementen

$$\begin{cases} a_{j+2i-1} & = a+i-1 \\ a_{j+2i} & = b+i-1 \end{cases} \quad \text{voor } i \geq 1$$

worden gekozen zolang er geen dubbele elementen optreden, want immers

$$\begin{cases} s_{j+2i-1} & = (a+i-1)(b+i-1) \\ s_{j+2i} & = (a+i)(b+i-1) \end{cases} \quad \text{voor } i = 1, \ldots, k,$$

hetgeen de deelbaarheid bewijst.
Kiezen we nu $a = k+1$ en $b = 1$, dan hebben we de serie van opgave A1. Voor het zoeken naar andere series blijkt het handiger te zijn om bij a_n te beginnen en vanaf daar de lijst omlaag aan te vullen. We gaan één of meerdere elementen invoegen. We gebruiken de notatie $T(a_1^{k_1}, \ldots, a_r^{k_r})$ om aan te geven dat de getallen $a_1, \ldots, a_r$ worden ingevoegd. De exponenten geven de positie van de invoegingen aan, van achteren af geteld. Dus $T(6^1)$ wil zeggen dat op de laatste positie een 6 wordt geplaatst, en $T(1^2, 3^4, 5^6)$ houdt in dat 3 elementen achter in de serie zijn ingevoegd. De notatie $T(0^k)$ houdt in dat op die plaats de regelmatigheid van het om en om plaatsen van grote en kleine getallen wordt verstoord. Bijvoorbeeld $T(0^3)$ houdt in voor $n = 2k$, even dat $a_{2k} = k$, $a_{2k-1} = 2k$ zoals in opgave A1, echter $a_{2k-2} = 2k-2$ in plaats van $a_{2k-2} = k-1$. In dit geval wordt $2k-1$ overgeslagen. Dit element moet ergens voorin de serie worden opgenomen. We vinden uiteindelijk de serie $T(0^3) : 2k-1, 1, 2, k+1, 3, k+2, \ldots, k-1, 2k-2, 0, 2k, k$.
Zo vinden we voor $n = 10$ de serie $9, 1, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 10, 5$. Hieronder sommen we een aantal series op:

$$\begin{array}{rll}
- & \underline{k+1, 1, \ldots, 2k, k} & n = 2k \\
T(0^3) & 2k-1, 1, \underline{2, k+1, \ldots, k-1, 2k-2}, 0, 2k, k & n = 2k \\
T(0^3, 1^7) & 2k-4, 3, 2k-1, 2, \underline{4, k+1, \ldots, k-2, 2k-5}, & n = 2k \equiv 4 \bmod 6 \\
 & \quad 1, 2k-3, k-1, 2k-2, 0, 2k, k & \\
T(0^3, 0^9) & 2k-5, \left\{ \begin{matrix} 1,3 \\ 3,1 \end{matrix} \right\}, 2k-1, 2, \underline{4, k+1, \ldots, k-3, 2k-6}, & n = 2k \equiv 2, 4 \bmod 6 \\
 & \quad 0, 2k-4, k-2, 2k-3, k-1, 2k-2, 0, 2k, k & \\
T(1^1) & 2k, \underline{2, k+1, \ldots, k, 2k-1}, 1 & n = 2k \\
T(1^1, 0^9) & 2k-5, 3, 2, 2k, \underline{4, k+1, \ldots, k-3, 2k-6}, & n = 2k \equiv 2 \bmod 6 \\
 & \quad 0, 2k-4, k-2, 2k-3, k-1, 2k-2, k, 2k-1, 1 & \\
T(1^1, 2^5) & 2k-3, 3, 2k, \underline{4, k+1, \ldots, k-1, 2k-4}, & n = 2k \equiv 0 \bmod 6 \\
 & \quad 2, 2k-2, k, 2k-1, 1 & \\
T(1^1, 3^3) & 2k-2, 2, 2k, \underline{4, k+1, \ldots, k, 2k-3}, 3, 2k-1, 1 & n = 2k \equiv 0, 4 \bmod 6 \\
T(1^1, 3^3, 5^5) & 2k-4, 2, 2k-2, 4, 2k, \underline{6, k+1, \ldots, k, 2k-5}, & n = 2k \equiv 0, 10, 18, 28 \bmod 30 \\
 & \quad 5, 2k-3, 3, 2k-1, 1 & \\
T(3^1) & 2k, 1, 2k+1, 2, \underline{4, k+2, \ldots, k+1, 2k-1}, 3 & n = 2k+1 \equiv 3, 5 \bmod 6 \\
T(6^1) & 2k-2, 1, 2k-1, 2, 2k, \left\{ \begin{matrix} 3,5,4 \\ 4,5,3 \end{matrix} \right\}, & n = 2k \equiv 12, 24, 32, 44 \bmod 60 \\
 & \quad \underline{k+2, 7, \ldots, k+1, 2k-3}, 6 &
\end{array}$$

De onderstreepte delen van de series corresponderen met de eerder genoemde elementen $a+i$ en $b+i$.

Opmerking van de jury Het is mogelijk om voor kleine n het aantal partities uit te rekenen dat voldoet aan de in de opgave genoemde voorwaarde. Er komen grillige aantallen uit. In tabel 1 zijn de aantallen tot en met 30 bij elkaar gezet. Een programma om deze aantallen te berekenen is beschikbaar via de website (zowel voor Windows als voor UNIX).

UWC oplossingen

dim	aantal	dim	aantal	dim	aantal
1	1	11	29	21	5.320
2	1	12	39	22	3.220
3	2	13	67	23	4.489
4	2	14	55	24	20.237
5	4	15	386	25	36.580
6	5	16	235	26	52.875
7	7	17	312	27	197.103
8	7	18	347	28	216.562
9	24	19	451	29	289.478
10	22	20	1.319	30	567.396

Tabel 1 Het aantal partities dat voldoet aan de eisen uit opgave 2001/3-A.

Opgave 2001/3-B
Twee platte linten worden als een kruis over elkaar gelegd en op het kruispunt aan elkaar gelijmd. De bovenzijde van het kruis wordt rood gekleurd, de onderzijde groen. De vier losse uiteinden worden eveneens aan elkaar geplakt, nadat ieder van de uiteinden een geheel aantal slagen gedraaid is; de kleuren sluiten aan. Er ontstaat zo een ruimtelijke figuur met twee kruispunten die viervoudig verbonden zijn. Langs ieder verbindingsstuk is draaiing mogelijk.
Kan zo'n figuur altijd uit een torus geknipt worden?

Oplossing De vraagstelling liet enige ruimte voor interpretatie: het bleef in het midden of de uiteinden, alvorens aan elkaar te worden bevestigd, al dan niet mogen worden 'verstrengeld'. Hierbij kan in het bijzonder de onderlinge oriëntatie van de uiteinden veranderd worden, en sommige van zulke figuren kunnen inderdaad uit een torus geknipt worden! We zullen hier we volstaan met een tegenvoorbeeld in de 'kleinst gemene deler'.
De twee tegenoverliggende uiteinden van het eerste lint draaien we beide een hele slag, de uiteinden van het andere lint draaien we geheel niet, en vervolgens bevestigen we de vier uiteinden 'rechtstreeks' aan elkaar. De resulterende figuur kan niet uit een torus worden geknipt. Dit werd impliciet of expliciet opgemerkt in alle inzendingen. Het team van Gerben Stavenga heeft zelfs een fraaie foto meegestuurd.
De volgende redenering is gebaseerd op argumenten van Filip de Smet en het team van Gerben Stavenga. Neem eens aan dat de figuur uit een torus T geknipt kan worden. Zij L het lint zonder torsie. Het complement $T\backslash L$ bestaat uit één of twee samenhangscomponenten, al naar gelang L al dan niet om de middelste as van T gewonden is. In geval (1) is $T\backslash L$ een gesloten strip; in geval (2) is één van de twee samenhangscomponenten homeomorf met een enkelvoudig samenhangend gebied in $\mathbf{R}^2$. De twee delen D_1 en D_2 van het andere lint liggen in $T\backslash L$ en hebben beide een hele slag torsie. Hun bevestigingspunten met L corresponderen met twee paren punten op de rand van $T\backslash L$ die door D_1 en D_1 met elkaar verbonden worden. In beide gevallen is echter eenvoudig in te zien dat D_1 en D_2 niet beide torsie kunnen hebben.

Opgave 2001/3-C
Los het volgende stelsel algebraïsche vergelijkingen op:

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{2r}{2i-1} x_i = 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Oplossing De volgende uitwerking is een iets vereenvoudigde versie van de oplossing van Jan Tuitman.

UWC oplossingen

Het is triviaal dat het stelsel een unieke oplossing $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ heeft. Beschouw de genererende functie

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(2k-1)!} t^{2k-1}.$$

Er geldt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(2k-1)!(2n-2k+1)!} t^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \sum_{k=1}^{n} x_k \binom{2n}{2k-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $F(t) = 1 - \frac{2}{e^t+1}$. De *Bernouilligetallen* B_n zijn gedefinieerd door $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$. Wegens $\frac{t}{e^t-1} - \frac{t}{e^t+1} = \frac{2t}{e^{2t}-1}$ geldt

$$\frac{t}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2t)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1-2^n) \frac{B_n}{n!} t^n.$$

We vinden zo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(2k-1)!} t^{2k-1} = F(t) = 1 - \frac{2}{e^t+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \frac{B_n}{n!} t^{n-1}. \tag{1}$$

Elementair rekenwerk laat zien dat $B_1 = -\frac{1}{2}$. Verder is $t(e^t-1)^{-1} - (1 + \frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}t \coth \frac{1}{2}t$ een even functie, waaruit volgt dat $B_3 = B_5 = \cdots = 0$. Zodoende is

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) \frac{B_n}{n!} t^{n-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2^{2k} - 1) \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k-1}. \tag{2}$$

Vergelijken van de coëfficienten van t^{2k-1} in (1) en (2) geeft tenslotte $x_k = \frac{B_{2k}}{k}(2^{2k}-1)$.

Uitslag Editie 2001/3

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.

	Naam	A	B	C	*Totaal*
1.	Gerben Stavenga e.a. (Utrecht)	7	9	9	102
2.	Guit-Jan Ridderbos (VU Amsterdam)	6	8	8	90
3.	Hendrik Hubrechts/Steven Delvaux (Leuven)	10	10	1	75
4.	Jan Tuitman (Groningen)	5	-	10	65
5.	Filip De Smet (Gent)	8	9	-	60

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie

We vermelden alleen de top 5. Voor de complete ladderstand verwijzen we naar de UWC-website.

	Naam	*Punten*
1.	Steven Lippens	301
2.	Herbert Beltman	198
3.	Joeri Van der Veken e.a.	185
4.	Jan Tuitman	165
5.	Stijn Symens	143