Koeno Gravemeijer
Vakgroep Onderwijskunde Utrecht
Freudenthal Instituut
postbus 9432, 3506 GK Utrecht
koeno@fi.uu.nl

Inaugurele rede

Reken-wiskundeonderwijs

Koeno Gravenmeijer heeft op 8 maart van het jaar 2000 het ambt aanvaard van bijzonder hoogleraar op het vakgebied van "Domeinspecifieke onderwijstheorieen, in het bijzonder voor rekenen-wiskunde", aan de Faculteit Sociale Wetenschappen, mede ten behoeve van de Faculteit Wiskunde en Informatica. Deze leerstoel is aangevraagd door de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Rekenwiskundeonderwijs (NVORWO). Naast deze positie is hij onderzoekscoördinator bij het Freudenthal Instituut. Dit artikel is een bewerking van zijn oratie.

Dankzij de inspanningen van velen heeft Nederland reken-wiskundeonderwijs dat bij de tijd is. Daarmee onderscheidt Nederland zich van tal van andere landen, waar de inzichten die hier zo'n dertig jaar geleden de basis hebben gelegd voor de vernieuwing van het rekenwiskundeonderwijs, pas een jaar of tien opgeld doen. Dit is geen reden om tevreden achterover te gaan leunen. Uiteraard mogen we best tevreden achterom kijken, maar we moeten ook vooruitkijken.

Er zijn twee zaken die volgens mij van fundamentele betekenis zijn voor het toekomstige reken-wiskundeonderwijs. In de eerste plaats zijn dat de maatschappelijke veranderingen die het gevolg zijn van de snelle groei van de informatietechnologie. In de tweede plaats zijn dat de moderne opvattingen over leren en onderwijzen. Wat dit laatste betreft wil ik mij in dit artikel beperken tot het idee van kennisconstructie voor zo ver dat past binnen het idee van 'wiskunde als menselijke activiteit' waarop de bovengenoemde vernieuwing van het rekenwiskundeonderwijs is gebaseerd. Zowel het daadwerkelijk vormgeven van deze ideeën en het aanpassen van het onderwijs aan nieuwe maatschappelijke behoeften zal ingrijpende consequenties hebben voor de leraren. Daarom wil ik naast de betekenis van de maatschappelijke ontwikkelingen en de vormgeving van het reken-wiskundeonderwijs ook de professionalisering van leraren aan de orde stellen. Ik wil beginnen met de maatschappelijke ontwikkelingen.

Maatschappelijke ontwikkelingen

Het toenemend gebruik van computers en rekenmachines betekent volgens mij niet dat we minder reken-wiskundeonderwijs nodig hebben. Noch dat we met eenvoudige rekenvaardigheid kunnen volstaan. Ik zal proberen te laten zien dat iedereen eerder wiskunde van een hoger niveau nodig zal hebben. Dit betekent dat we de leerlingen daar al binnen de basisschool en de basisvorming mee in aanraking zullen moeten laten komen. De crux zit hem in wat je nodig hebt om adequaat met de nieuwe technologie te kunnen omgaan. Voor ik mij op de toekomst richt wil ik echter laten zien dat het huidige gebruik van computers en rekenmachines al problemen veroorzaakt in de aansluiting tussen het rekenonderwijs van vroeger en de maatschappij van nu.

Ter illustratie neem ik een stukje uit een column in het gratis treinblad Metro (van 25 februari 2000), waarin Pauline de Bok schrijft over haar rekenvaardigheid: "Vragend kijkt de visboer mij aan: 'Mevrouw?' M'n boodschappenbriefje, waar is m'n boodschappenbriefje? Ik graai in mijn zakken, in m'n tas, kijk in m'n portemonnee. Dan maar uit het hoofd. Zeven volwassenen, drie kinderen … eh, in elk pakje zitten twee filets, per volwassene had ik drie halve gedacht, de kinderen ieder … Achter me voel ik nauw verholen ongeduld van een winkel vol wachtenden. Hulpeloos kijk ik de visboer aan. Ik leg hem de feiten voor, hij is even stil en vertelt me wat ik nodig heb. Met meewarige blik. Goed, fluister ik in mijn schaamte. Het was de druk van de andere klanten, zo troost ik mezelf op weg naar huis en ik probeer het sommetje nu in vrijheid eventjes snel te maken. Weer stokt mijn innerlijke telraam." Toch heeft Pauline de Bok heel degelijk rekenwiskundeonderwijs genoten. Ze memoreert: 'Op de Mariaschool hebben we uren tafels opgedreund onder het scherpe oor van de nonnen. Jaren heb ik de wiskunde I en II-lessen glansrijk doorstaan. En wat heeft het me opgeleverd? Goed, als ik zes maal zeven zeg, denk ik nog steeds tweeënveertig, maar ik vertrouw dat antwoord niet meer. Waarom denk ik tweeënveertig? De reeks cijfers die vroeger automatisch ter controle

Koeno Gravemeijer

voor de 21ste eeuw

voor mijn geestesoog verscheen, is weggevaagd. Hulpeloos sta ik met die getallen in mijn hoofd en voel me oliedom. Het is mijn eigen schuld, verwijt ik mijzelf. Een luiaard ben ik: ik reken zo min mogelijk. Als mijn computer in de buurt is, rekent hij alles voor mij uit en anders heb ik mijn vriend nog. Op hem schuif ik heel wat sommen af. Ik heb mijn talenten niet benut, ik heb mijn rekenkunsten verkwanseld.' Pauline de Bok lijkt rekenen te hebben geleerd als een verzameling van losse feitjes, regels en procedures. Waarschijnlijk was er weinig aandacht voor toepassingen, behalve dan in standaard redactiesommen. Dit type rekenonderwijs had zijn nut in een tijd waarin je nog veel met pen en papier moest uitrekenen. Inmiddels heeft de zakrekenmachine veel van dit rekenwerk overgenomen. Mechanische rekenvaardigheid heeft zijn maatschappelijke functionaliteit verloren. Het gevolg is een gebrek aan oefening, en dat leidt weer tot onzekerheid.

In het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs worden de tafels niet meer als losse feitjes geleerd. Tegenwoordig ligt de nadruk juist op samenhang. Zo wordt de leerlingen bij het leren van de tafels van begin af aan gevraagd om onbekende tafelproducten af te leiden uit wat ze al weten. Bijvoorbeeld door gebruik te maken van herhaald optellen.

Door een opgave als 4×6 te berekenen via $6+6=12$, $12+6=18$, $18+6=24$. Of door gebruik te maken van verdubbelen.

Bijvoorbeeld door voor het berekenen van 8x6 uit te gaan van $4\times6 = 24$, 8×6 is dan het dubbele is 48. Of door op een andere manier gebruik te maken van een bekend tafelproduct[2] .

Met dit onderwijs kan worden bereikt dat de leerlingen tafelproducten die ze niet direct uit het hoofd weten, of waar ze niet zeker van zijn, altijd kunnen reconstrueren.

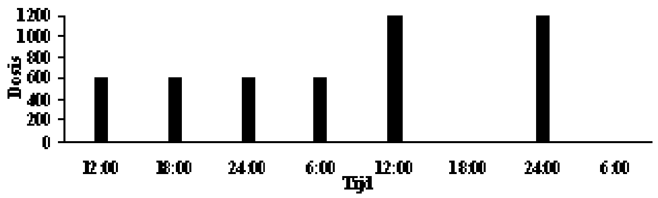
Bij 6x7 kun je dan denken aan 6x6=36 en 6x7 is dus 6 meer, dus 6x7=42. Of je gaat uit van 3x7=21 dus 6x7 is het dubbele, dus 6x7=42.

De nieuwe aanpak steunt op andere didactische inzichten dan de oude. Het zwaartepunt ligt niet meer op het uit het hoofd leren, het memoriseren. In plaats daarvan ligt het accent nu op het redeneren en het leggen van verbanden. De verandering betreft niet alleen een verandering van werkwijze, maar ook een verandering van doel: er wordt onder meer gemikt op een ander type getalkennis. Ik denk dan aan getalkennis, waarbij getallen wiskundige objecten zijn geworden. Van Hiele[3] beschrijft dit objectkarakter van getallen door te spreken van getallen als knooppunten in een relatienet. Een simpel voorbeeld van zo'n knooppunt is het getal twaalf, dat een wiskundig object is geworden wanneer de leerlingen dit spontaan associëren met $12 = 10+2$, $12 = 2\times6$, $12 = 3\times4$, maar bijvoorbeeld ook met 12 = de helft van 24 of $12 = 20 - 8$.

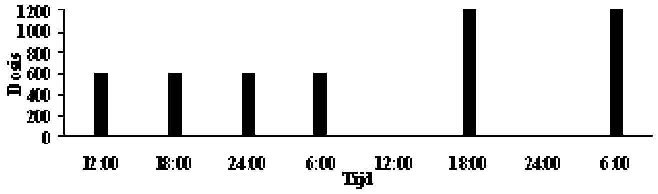
Het voordeel van dit soort kennis is dat je deze flexibel kunt inzetten als puzzelstukjes, die je naar believen kunt combineren. Greeno[4] vergelijkt dit type getalkennis met een omgeving waar je goed de weg weet. Een omgeving, waar je tal van herkenningspunten hebt en allerlei handige routes kent. Het aardige van dit beeld is, dat daarmee eveneens wordt uitgedrukt dat de leerling die dit type getalkennis ontwikkelt, een stukje nieuwe werkelijkheid creëert. Een relatienet rond vermenigvuldigen zal uiteraard ook relaties met andere bewerkingen, zoals optellen, aftrekken, delen en kennis van eenvoudige kwadraten moeten bevatten. Bovendien dient de gangbare tafelkennis te worden uitgebouwd met wat Treffers de 'grote tafels' noemt: Als je 3×7 weet, dan weet je ook 30×7 en 30×70 enz. Daarnaast zullen de leerlingen ook vertrouwd moeten raken met breuken en kommagetallen. Ik denk daarbij bijvoorbeeld aan mooie getallen als 0.25 of $\frac{1}{4}$.

Rond $4 \times 0.25 = 1$ kun je zo een mooi netwerkje opbouwen met $4\times2,5 = 10$, $4\times25 = 100$, $4\times250 = 1000$.

Zulke kennis heb je nodig bij het schattend rekenen. Bijvoorbeeld om te bepalen dat 4×247 ongeveer 1000 is. En naar mate het precieze rekenen vaker aan machines wordt overgelaten neemt het belang van het schattend rekenen toe. Al was het alleen maar om de machine globaal te kunnen controleren.



Figuur 1 Snelle start met nieuwe dosering



Figuur 2 Uitgestelde start nieuwe dosering[10]

Samenvattend kunnen we zeggen dat de aandacht voor het ontwikkelen van een flexibel netwerk van getalrelaties een belangrijke verworvenheid is van het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Maar het gaat uiteindelijk om het kunnen toepassen. En bij toepassen gaat het om meer dan getalrelaties alleen. Het is ook een kwestie van inzicht, en van attitude: hoe benader je een toepassingsprobleem? Wanneer je bij het visboerprobleem op zoek gaat naar de formele standaardprocedures die hier mogelijk bruikbaar zijn dan wordt het tamelijk lastig. Zeker als je denkt dat de traditionele standaardprocedure eist dat je de betrokken getallen eerst als echte breuken schrijft. Pauline de Bok wilde zeven volwassenen ieder drie halve filets geven. Volgens de traditionele standaardprocedure moet je zeven keer drie halve dan herschrijven als $\frac{7}{1} \times \frac{3}{2}$ en de tellers met de tellers en de noemers met de noemers vermenigvuldigen. Dat levert $\frac{21}{2}$ op en dat moet je nog vereenvoudigen tot $10\frac{1}{2}$. Dus:

$$\frac{7}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}.$$

Met meer inzichtelijke rekenkennis zou je op het idee kunnen komen $7 \times 1\frac{1}{2}$ te vervangen door de helft van 7×3 of door $1\frac{1}{2} \times 7$. Maar dat zijn wel puur rekenkundige oplossingen. Het kan ook met een redenering die dichterbij de context blijft. Als één volwassene $1\frac{1}{2}$ filet krijgt, dan heb je voor twee volwassenen 3 filets nodig. Dan kan je gemakkelijk verder redeneren: 1 volwassene: $1\frac{1}{2}$ filet, 2 volwassenen: 3 filets, 4 volwassenen: 6 filets, 6 volwassenen: 9 filets, 7 volwassenen is $1\frac{1}{2}$ meer, dus 7 volwassenen: $10\frac{1}{2}$ filets

Ik heb met dit voorbeeld willen laten zien dat het moderne realistisch reken-wiskundeonderwijs tot meer zekerheid, meer flexibiliteit en een betere toepasbaarheid leidt dan het eraan voorafgaande, mechanistische, rekenonderwijs. Het huidige reken-wiskundeonderwijs past daarmee veel beter bij de maatschappij van nu.

Rekenen-wiskunde in de toekomst

Maar hoe staat het met de toekomst? Die is dichterbij dan je denkt: de vierjarige leerling die nu de basisschool betreedt is over veertien jaar achttien, we leven dan in het jaar 2016. En als we een onderwijsverandering willen voorbereiden dan zullen we nog verder vooruit moeten kijken. Ik denk dan al gauw aan 2025.

Freudenthal voorspelde in 1976 dat het wiskundeonderwijs zo rond het jaar 2000 of 2010 verdwenen zou zijn.[5] De wiskunde die het toenmalige Instituut voor Onderzoek van Wetenschappelijk Onderwijs (IOWO) — de voorloper van het Freudenthal Instituut — voorstond, was zo verweven met andere vakken, dat Freudenthal verwachtte dat de wiskunde in deze vakken zou worden opgenomen. Wiskunde zou als zelfstandig vak ophouden te bestaan. Behalve misschien als specialisatie voor oudere leerlingen. Ik hoop niet dat Freudenthal gelijk krijgt. In het middelbaar beroepsonderwijs (MBO) is echter wel een tendens te bespeuren in die richting. Nieuwe ontwikkelingen als modulering en meer nadruk op een verbinding met de praktijk na de school, zouden kunnen maken dat wiskunde straks bijna alleen nog maar een kans krijgt in toepassingen. Ik denk dat dit geen goede zaak is. Niet omdat wiskunde in toepassingen niet goed zou zijn, maar omdat de informatiemaatschappij wiskunde vraagt die het niveau van de toepassingen overstijgt. Freudenthal heeft dit niet voorzien en achteraf is het natuurlijk gemakkelijk om te wijzen op de maatschappelijke consequenties van de snelle opmars van de informatietechnologie. Toch is het goed om er even bij stil te staan hoe snel de ontwikkelingen gaan.

Zo blijkt dat de capaciteit van een modale chip elke 18 maanden verdubbelt. Verder daalt de prijs van een computer waarop je een geavanceerd computeralgebra-programma als Maple kunt draaien elke zes jaar met een factor tien.[6] Het gevolg van deze ontwikkeling is dat zwaardere zakrekenmachines inmiddels computeralgebra-systemen, als Maple of Derive, bevatten die algebraïsche vergelijkingen voor je oplossen en waaraan je integraal- en differentiaalrekening kunt overlaten.

Voor een deel ervaren de meeste van ons de technologische ontwikkeling direct in de dagelijkse levenssfeer en het werk. Niet alleen maken we steeds meer gebruik van computers, we maken ook steeds meer gebruik van apparaten waarin computertechnologie zit verwerkt. Kenelly[7] spreekt in dit verband van een 'black-box world'. We krijgen steeds meer te maken met apparaten waarvan we niet eens globaal weten wat ze doen. Dit maakt het vaak lastig om ermee om te gaan. Kenelly geeft als voorbeeld een vliegtuigongeluk dat werd veroorzaakt door een fout bij het intypen van de coördinaten van het vertrekpunt. De computer maakt gebruik van een ingebouwde landkaart die ook hoogtegegevens bevat. De foute coördinaten maakten dat de computer van een verkeerde hoogte uitging, waardoor het vliegtuig met een veel te grote snelheid de grond raakte. Piloten zouden zich moeten realiseren hoe cruciaal de startcoördinaten zijn voor het goed functioneren van de automatische piloot.

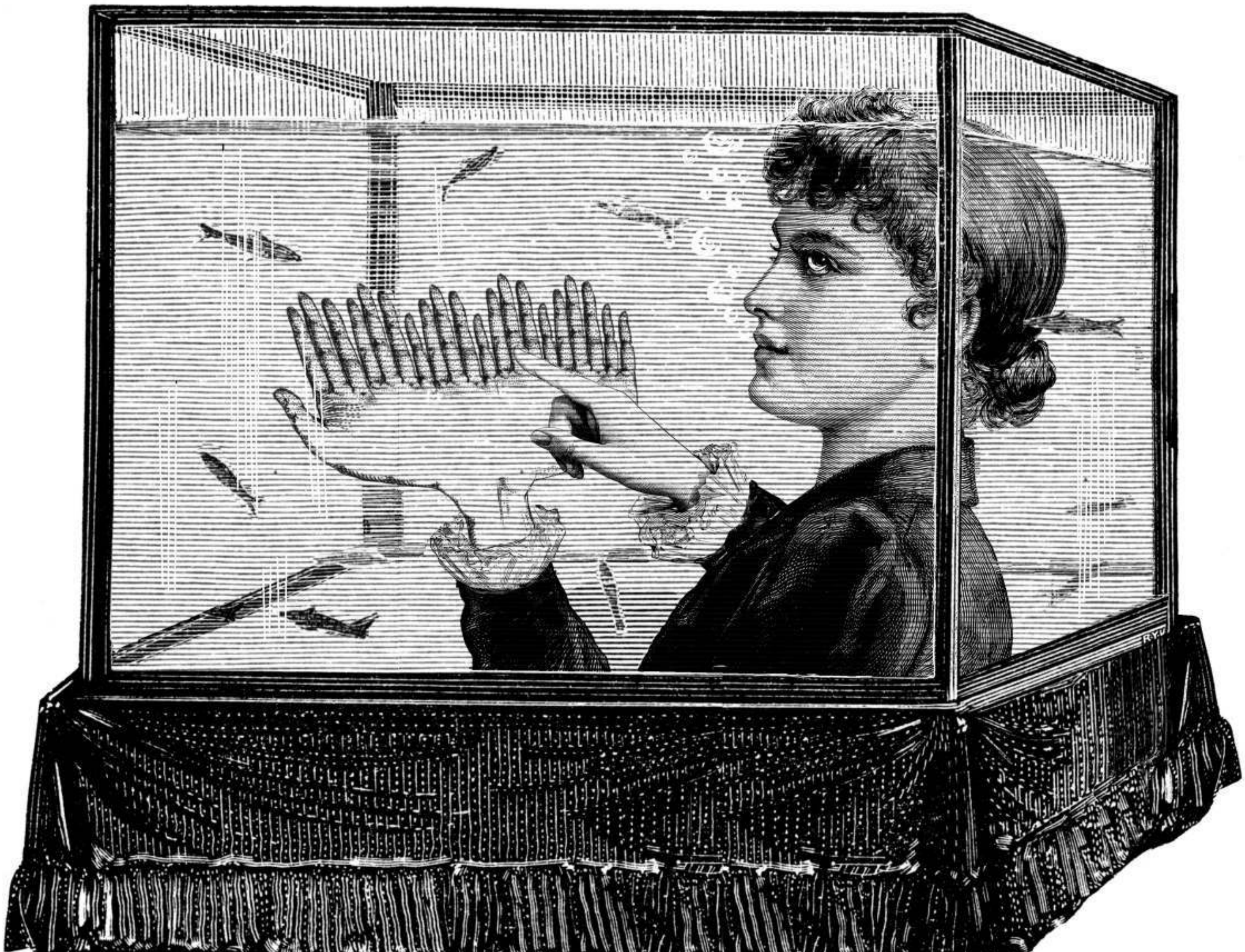
Kenelly pleit voor het ontwikkelen van 'grey-box experience for a black-box world'. Experience moet hier ruim worden opgevat; het gaat ook om de vorming van een conceptueel model van de werking van die black box.[8] Ik wil het belang hiervan aantonen door gebruik te maken van onderzoek van Noss[9], die samen met anderen onderzoek doet naar het gebruik van wiskunde in de alledaagse beroepspraktijk. Hij betoogt dat de belangrijkste wiskundige activiteit in de beroepssfeer bestaat uit het modelleren van complexe situaties. Een van de voorbeelden die hij geeft betreft een probleem waar verpleegkundigen zich voor geplaatst zien wanneer een arts de voorgeschreven dosis van een antibioticum, vancomycine geheten, verandert van 4 x per dag 600 mg naar 2 x per dag 1200 mg. De vraag waar de verpleegkundigen nu voor staan is wanneer met de nieuwe dosering te beginnen. Dit is geen academische kwestie, want te weinig vancomycine in het bloed betekent dat het medicijn zijn werk niet kan doen, terwijl te veel doofheid tot gevolg kan hebben. Bekend is dat dit medicijn slechts langzaam wordt afgebroken. Hoe lang moet je dan wachten na het toedienen van de laatste lage dosis, voor je die nieuwe, hoge, dosis kunt toedienen? Zes uur (figuur 1), of twaalf uur (figuur 2), of iets er tussenin?

De verpleegkundigen maken bij het oplossen van dit probleem gebruik van een model van de situatie; ze denken in termen van een grafiek die de hoogte van het medicijnniveau in het bloed beschrijft als functie van de tijd. Ze tekenen de grafiek niet daadwerkelijk maar verwijzen ernaar wanneer ze spreken van ’piek’ en ’verval’. De piek doet zich voor bij de toediening van een nieuwe dosis, daarna neemt het medicijnniveau af tot de nieuwe dosis wordt toegediend. De tijd die verstrijkt en het tempo waarin het medicijnniveau daalt bepalen samen hoeveel er nog in het bloed zit bij de toediening van de volgende dosis.

De kern is dat de verpleegkundigen niet zomaar een model maken; ze maken een mathematisch model. Ze gebruiken wiskundige middelen als getallen, grafieken, variabelen en functies om hun probleem te modelleren. Voor het modelleren van complexe situaties heb je reken-wiskundige kennis en inzichten nodig. Dat zal zeker gelden voor de modellen die de basis vormen voor veel black-box-technologie.

Wanneer we dus willen dat toekomstige gebruikers van geavanceerde technologie globaal begrijpen wat die technologie doet, dan zullen deze gebruikers over de noodzakelijke reken-wiskundige bagage moeten beschikken. Een deel daarvan overstijgt het niveau dat nu voor basisschool en basisvorming gebruikelijk is. Maar, we moeten daarbij wel bedenken dat het kunnen begrijpen van een wiskundig model andere kennis vraagt dan het model kunnen doorrekenen. De gebruiker hoeft niet te kunnen wat de computer kan. Het zal gaan om meer globale noties en inzichten. Dit kan betekenen dat dit type kennis binnen het bereik van een grotere groep leerlingen kan worden gebracht. En dat er op jongere leeftijd mee kan worden begonnen.

Overigens kan worden opgemerkt dat hiermee wordt aangesloten op een traditie binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs. Ik denk in dit verband aan de door De Lange, Kindt en anderen ontwikkelde Wiskunde A, waarmee bepaalde wiskunde binnen het bereik van een groter aantal leerlingen is gebracht. Maar ook de realistische aanpak van het rekenen op de basisschool past in die categorie. De cijferalgoritmen zijn immers ook te beschouwen als black-boxes, waarvan de werking voor jonge kinderen inzichtelijk wordt gemaakt. Op een vergelijkbare manier wordt er op de basisschool ook al het nodige gedaan aan het verkennen van grafieken. Tenslotte kan ook de computer zelf een rol spelen bij het toegankelijk maken van reken-wiskundige kennis en inzichten. Uiteraard moet daarvoor specifieke didactische software worden ontwikkeld.



illustratie: Ryu Tajiri

Vakdidactische vernieuwing

Met Freudenthal, zien we wiskunde binnen het realistisch reken-wiskundeonderwijs primair als een activiteit met als centraal element, de activiteit van het mathematiseren; het wiskundig organiseren van de werkelijkheid, of van de wiskunde zelf. Door Treffers respectievelijk horizontaal en verticaal mathematiseren genoemd.[11] Het basisidee van het realistisch reken-wiskundeonderwijs is dat een combinatie van horizontaal en verticaal mathematiseren de leerlingen in de gelegenheid stelt reken-wiskundige kennis en inzichten uit te vinden. Daarmee hoop je te bereiken dat de leerlingen wiskunde construeren waarvan ze zelf de juistheid kunnen overzien. Zodat ze daarvoor niet hoeven te leunen op de autoriteit van de leraar of het leerboek.

De taak van de leraar is dan de leerlingen te begeleiden bij het heruitvinden van wiskunde. De eigen kennis en de eigen inbreng van de leerlingen vormen daarbij het vertrekpunt. Deze benadering past goed bij constructivistische opvattingen over kennisconstructie. Volgens het constructivisme is kennis niet zonder meer overdraagbaar, omdat eenieder zijn of haar eigen kennis construeert. In het reken-wiskundeonderwijs ontstaan volgens deze theorie al snel communicatieproblemen doorat leraar en leerlingen dezelfde termen en activiteiten binnen verschillende referentiekaders interpreteren. Realistisch reken-wiskundeonderwijs kan aan dergelijke communicatieprobleem tegemoet komen door de eigen inbreng van de leerlingen te stimuleren en daarop voort te bouwen. Op die manier kan worden gewaarborgd dat steeds wordt aangesloten bij het referentiekader van de leerlingen.

Een dergelijke invulling van realistisch reken-wiskundeonderwijs, veronderstelt een andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen dan het traditionele reken-wiskundeonderwijs. In het traditionele reken-wiskundeonderwijs was het de taak van de leerlingen uit te vinden wat de leraar in zijn of haar hoofd had. In het nieuwe onderwijs moet de leraar proberen om erachter te komen wat de leerlingen denken. Bovendien moet de leraar dit denken van de leerlingen stimuleren en sturen. Daarmee is de taak van de leraar veel complexer geworden. Het is nu immers niet meer de leraar die onderwijst maar de leerling die uitvindt. En, hoe zorg je ervoor dat de leerlingen uitvinden wat je wilt dat ze uitvinden? Of, om Ball te parafraseren: 'hoe kun je recht doen aan de eigen inbreng en eigen ideeën van de leerlingen en ze tegelijkertijd vertrouwd maken met de wiskunde die door anderen is uitgevonden?'[12]

Bij de beantwoording van deze uitdaging kan de Nederlandse leraar steunen op de eerder genoemde realistische schoolboeken. Decennia van ontwikkelingsonderzoek in en rond het Freudenthal Instituut hebben ertoe geleid dat we nu beschikken over uitgebalanceerde leergangen die geleid heruitvinden mogelijk maken. De goed functionerende netwerken binnen de kring van reken-wiskunde didactici hebben ervoor gezorgd dat deze leergangen concreet zijn uitgewerkt in moderne reken-wiskundemethoden die ook breed zijn ingevoerd.

Maar het is wel de leraar die dit in de praktijk concreet moet invullen. Die moet proberen aan te sluiten bij de actuele kennis en ideeën van de leerlingen. En die moet bedenken hoe de leerlingen individueel en als groep te helpen deze kennis verder uit te bouwen. Voorwaar geen eenvoudige opdracht.

De professionalisering van leraren

Het zal duidelijk zijn dat leraren tijd nodig zullen hebben om dit nieuwe reken-wiskundeonderwijs onder de knie te krijgen. En dat kan alleen door te experimenteren met het eigen onderwijs. De eigen onderwijspraktijk is mijns inziens de beste leersituatie. Ik denk dan aan een proces van experimenteren, reflecteren en discussiëren. Met 'discussiëren' doel ik op het feit dat leraren niet ieder voor zich het wiel moeten gaan uitvinden. Leraren kunnen van en met elkaar leren en externe deskundigen kunnen zo'n leerproces ondersteunen.[13]

Hier kunnen we ons een zelfde rolverdeling tussen de externe deskundigen en de leraren voorstellen als die in het beoogde reken-wiskundeonderwijs bestaat tussen de leraar en de leerlingen. Wat betekent dat de eigen inbreng en het eigen oordeel van de leraren voorop staat, maar er toch een gidsrol voor de deskundige is weggelegd. Een belangrijk verschil met het 'gewone' onderwijs is echter dat er tussen leraren en deskundigen veel meer op voet van gelijkheid zal worden gediscussieerd omdat de leraren specifieke praktijkdeskundigheid hebben waar de externe deskundigen niet over beschikken.[14]

Dat vakdidactici, zoals ikzelf, een bepaald soort onderwijs voor ogen hebben, betekent niet dat de leraren uiteindelijk aan dit ideaal moeten gaan voldoen. Een open samenwerking veronderstelt immers dat deze ideaalbeelden ook ter discussie staan en aan de praktijk worden getoetst. Er zal daarom veel meer gedacht moeten worden in termen van 'gap closing', waarbij praktijk en idealen bij elkaar komen in een proces van wederzijdse aanpassing. Aan de ene kant betreft dit een proces waarbij het gat tussen praktijk en idealen wordt gedicht doordat de leraren steeds verder toe groeien naar ideaaltypisch realistisch reken-wiskundeonderwijs. Aan de andere kant betreft dit een proces van aanpassing van het ideaalbeeld onder invloed van uitwisseling van ervaringen en ideeën.

De externe deskundigen komen dan voor de taak te staan de theorie over voortbouwen op eigen inbreng van de leerlingen verder uit te bouwen. Hoe realiseer je dat in de praktijk, wat is er reëel mogelijk? Wat zijn de belemmeringen en wat kun je daaraan doen? Van leraren zal worden gevraagd dat ze zich hun praktijktheorieën bewustmaken en daarop reflecteren. Wat wil je met je onderwijs, wat zijn de doelen, wat vind je echt belangrijk? Wat doe om dat te bereiken? Waarom denk je dat dat werkt?

Externe deskundigen kunnen het experimenteren en reflecteren bovendien ondersteunen door beschikbare wetenschappelijke kennis in te brengen. Ik denk hier bijvoorbeeld aan onderzoek van Desforges & Cockburn.[15] Zij verrichtten klassenobservaties bij leraren die aangaven probleemgeoriënteerd te willen werken. Uit die observaties bleek dat deze leraren geconfronteerd werden met leerlingen die verandering in een meer probleemgeoriënteerde richting tegenwerkten. Ze bleven vragen wat ze moesten doen, wilden steeds aanwijzingen, meer voordoen. Leraren met zulke ervaringen zullen van mening zijn dat probleemgeoriënteerd onderwijs met hun leerlingen niet mogelijk is. En de praktijk geeft hen daarin ook gelijk.

Maar vanuit een wetenschappelijk perspectief valt te verdedigen dat er vermoedelijk een onderliggende oorzaak is die te maken heeft met de rolpatronen die in de loop der tijd zijn ontstaan. De leerlingen zijn gewend dat de docent uitlegt en voordoet. En dat hun werk wordt beoordeeld op de mate van overeenstemming met wat de docent heeft uitgelegd en voorgedaan. Daardoor hebben ze zich een beeld gevormd van wat hun rol is en die van de docent, van wat er van hen wordt verwacht en van wat ze van de docent mogen verwachten. In de literatuur spreekt men in dit verband wel van een 'didactisch contract'.[16] Dit zogeheten contract is doorgaans niet gebaseerd op expliciete afspraken die leraar en leerlingen met elkaar hebben gemaakt, maar op basis van ervaring. Aspecten van zo'n contract worden zichtbaar als we een gangbare schoolse dialoog vergelijken met alledaagse communicatie buiten de school.

In de klas is een normaal lespatroon dat van vraag, antwoord en evaluatie. De leraar stelt een vraag, de leerling antwoordt en de leraar stelt vast of het antwoord goed is. Hoe typisch deze gesprekvorm is blijkt wanneer we ons voorstellen dat we dat buiten de school zouden doen. Stelt u zich de volgende dialoog voor:

A: Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwarsstraat is?
B: De Kerkdwarsstraat, dan moet u recht doorgaan tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.
A: Oké: Rechtdoor tot de tweede stoplichten, en daar naar rechts. En dan de eerste links. Goed zo, andere vraag: Kunt u nu ook vertellen waar de Middenweg is?

Op basis van informatie over het verschijnsel 'didactisch contract' zou een docent kunnen gaan experimenteren met het veranderen van de rollen en verwachtingen.

Uiteraard speelt de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van de leraar een belangrijke rol. Zo zal de mate waarin de leerlingen probleemgeoriënteerd willen werken niet alleen afhangen van het didactisch contract, maar ook van het probleem dat de leraar de leerlingen voorlegt. Het probleem moet zodanig van aard zijn dat het de leerlingen motiveert. Ik denk dat het dan gaat om de juiste mix van het creëren van een uitdaging en van een gevoel van: 'hier kom ik wel uit.' Vervolgens is het essentieel dat de leraar op de oplossingen van de leerlingen kan voortbouwen. Dit vergt een behoorlijke dosis vakdidactische kennis, inclusief zicht op leerlijnen en onderwijsactiviteiten.[17]

Naast bovengenoemde argumenten voor professionalisering, is er nog een reden om de professionalisering van leraren aan de orde te stellen en die betreft de in het begin van dit betoog genoemde tempo van de veranderingen in technologie en maatschappij. De maatschappij verandert en dus zal het onderwijs moeten veranderen. De maatschappij verandert steeds sneller en het gevolg zal zijn dat verandering een permanent kenmerk van het onderwijs wordt. Dit heeft consequenties voor de professionaliteit van leraren. Waar de leraar in een grijs verleden tijdens zijn of haar studie genoeg leerde om zijn of haar hele loopbaan mee toe te kunnen, zal de leraar van de toekomst zich steeds nieuwe vaardigheden eigen moeten maken. Dit plaatst ook de professionaliteitsontwikkeling in een ander perspectief. De gangbare separate nascholingsactiviteiten zullen moeten worden vervangen door nascholing als een continu proces. Ik spreek in dit verband overigens liever van professionalisering dan van nascholing. Niet omdat het mooier klinkt maar om dat je het centrum van de activiteit daarmee bij de leraar legt. Niet 'de leraar wordt nageschoold', maar 'de leraar werkt aan zijn of haar professionalisering'. Het werken aan de eigen professionaliteit zou mijns inziens ook een onderdeel van de beroepsidentiteit van de leraar moeten zijn. Leraren moeten daarvoor dan ook de ruimte en de middelen krijgen.[18]

Besluit

Terugblikkend op mijn betoog over 'reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw', zie ik drie ontwikkelingen.

1. De technologische ontwikkeling van onze maatschappij, die nieuw, daarbij passend reken-wiskundeonderwijs nodig maakt - voor alle leerlingen. Dat betekent dat dit nieuwe onderwijs met name in de basisschool en de basisvorming zijn beslag zal moeten krijgen.
2. De moderne inzichten in kennisconstructie en reken-wiskundedidactiek vragen om onderwijs dat een centrale plaats inruimt voor de eigen inbreng van de leerlingen en voor interactie tussen leraar en leerlingen en tussen leerlingen onderling.
3. Deze twee ontwikkelingen komen samen bij de leraar die uiteindelijk het onderwijs in de klas zal moeten vormgeven. Ook die zal zich moeten ontwikkelen. De leraar van de 21e eeuw zal nooit zijn uitgeleerd. Dit betekent mijns inziens dat het werken aan de eigen professionaliteit een structurele plaats moet krijgen in de taak van de leraar. Bijvoorkeur ingebed in een structuur, waarin de leraar met het eigen onderwijs experimenteert en kennis en ervaringen uitwisselt met collega's en andere deskundigen.

Noten en literatuur

1 Dit artikel is een ingekorte versie van de inauguratierede uitgesproken bij de aanvaarding van de NVORWO-leerstoel "Domeinspecifieke Onderwijstheorieën, in het bijzonder voor rekenen/wiskunde" aan de Universiteit Utrecht.

2 Zie Ter Heege (1985) voor een overzicht van de oplossingsstrategieën die de leerlingen spontaan gebruiken. Heege, H. ter (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. Educational Studies in Mathematics, 16 (4), 375–388.

3 Hiele, P.M. van (1973). Begrip en Inzicht. Purmerend: Muusses.

4 Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptional domain. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 170–218.

5 Freudenthal, H. (1976). Wiskundeonderwijs anno 2000. Euclides, 52, 290-295.

6 Kenelly, J. (2000). When machines do mathematics, what do mathematics teachers do? Paper gepresenteerd op de ICME-9 te Tokyo.

7 Zie noot 6.

8 Binnen het wiskundeonderwijs zelf zien we iets dergelijks bij het gebruik van grafische rekenmachines en computeralgebra. Hier blijkt, dat schijnbaar eenvoudige gebruiksvoorschriften toch vereisen dat de leerling over een conceptueel, wiskundig model beschikt (zie Drijvers, P. en Van Herwaarden, O. (2000). Instrumentation of ICT-tools: the case of algebra in a computer algebra environment. International Journal of Computeralgebra in Mathematics Education 7 (4), 255–275.).

9 Noss, R. (1997). New cultures, new numeracies. London: Institute of Education, University of London (Inaugural Professorial Lecture).

10 Figuren ontleend aan Noss (1997).

11 Treffers, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel.

12 Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. Elementary School Journal, 93, 373–397.

13 Een dergelijke opzet sluit ook nauw aan bij de huidige algemeen-onderwijskundige opvattingen over nascholing en professionalisering. Ook daar pleit men voor observatie en reflectie op de eigen en andermans lespraktijk en het gezamenlijk zoeken naar andere vormen van instructie (zie bijvoorbeeld het interview van M. Notenbomer met Berger en Derksen in Didactief en School jrg. 30, nr. 7, 2000). Dankzij de TIMSS-studies weten we dat zo'n systeem in Japan allang bestaat. En, dat de leraren daar, een belangrijk deel van hun professionele identiteit ontlenen aan het uitwisselen van ervaringen met experimentele lessen, zie Lewis, Ch. (2000). Lesson study: The core of Japanese professional development. Paper gepresenteerd tijdens de AERA conferentie in New Orleans.

14 Het Freudenthal Instituut probeert dergelijke processen te faciliteren in het Rekennet-project. Niet alleen door geïnteresseerde leraren bij elkaar te brengen maar ook door het creëren van een virtuele ontmoetingsplaats op internet.

15 Desforges, Ch. & Cockburn, A. (1987). Understanding the Mathematics Teacher, A Study of Practice in First School. London: The Falmer Press.

16 Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. Recherches en Didactique de Mathématiques, 9 (3), 308-336. Zie ook: Elbers, E. (1988). Social context and the child's construction of knowledge. Utrecht (dissertatie).

17 Via de nationale cursus reken-coördinator wordt thans geprobeerd rekencoördinatoren op te leiden die de collega's van de eigen school op dit punt kunnen ondersteunen.

18 Dit is ook een concept waar de NVORWO zich voor inzet.