

Douwe van der Kooi

Kennemerstraatweg 175, 1814 GH Alkmaar

dvdkooi@worldonline.nl

Tijd voor bewijzen

Douwe van der Kooi is docent wiskunde aan de locatie Da Vinci van de Purmerendse Scholengemeenschap. In dit artikel gaat hij in op een ogenschijnlijke tegenstelling in de ideologie van de Tweede Fase van het Voortgezet Onderwijs. Van leerlingen wordt verwacht dat ze meer dan vroeger zelfstandig leren. Dat is ook nodig, aangezien het totale lesprogramma zo overladen is, dat de contacttijd tot een noodzakelijk minimum is gereduceerd. Het gevolg is dat er veelal onvoldoende tijd is om leerlingen de vaardigheden te leren die nodig zijn om op een verantwoorde wijze de regie te voeren over het eigen leerproces.

Met enige heimwee denk ik soms terug aan mijn eigen wiskundeonderwijs in de jaren '60. Vanaf de eerste klas leerde je middels de standaardaanpak van "gegeven-te bewijzen-bewijs", al of niet gevolgd door "QED", een redenering te geven, die een uitspraak tot een algemeen geldende waarheid verhief. Omdat je voortdurend geconfronteerd werd met deze wijze van denken, wist je op zeker moment niet anders, deed je het dus ook zo. Je werd steeds alerter om ogenschijnlijke trivialiteiten pas voor waar te houden nadat ze waren bewezen. De docent deed het voor, jij deed het na en kreeg feed-back van de docent. Op zeker moment beheerste je de vaardigheid en was de docent niet meer nodig.

Dit verhaal is geen pleidooi om terug te gaan naar de wiskunde uit diezelfde jaren zestig en de daarbij horende strakke en gedisciplineerde aanpak. Het curriculum is gelukkig zodanig veranderd dat de maatschappelijke relevantie van wiskunde op de middelbare school geen discussiepunt meer is. De vormgeving van de leerstof in de nieuwe boeken is zo dat leerlingen, zeker in de onderbouw, wiskunde doorgaans een leuk en nuttig vak

vinden. Toch is er wat aan de hand. Het niveau waarop leerlingen bepaalde vaardigheden beheersen en het gemak waarmee vaardigheden worden aangewend lijken minder dan voorheen het geval was. Ik denk daarbij niet alleen aan algebraïsche vaardigheden. Het gaat ook en vooral om vaardigheden die nodig zijn bij het probleem-oplossen en andere redeneervaardigheden, zoals bewijzen. In dit artikel ga ik nader in op dit verschijnsel.

Didactische ontwikkelingen

Toen ik in de loop van de jaren '70 wiskunde-docent werd in het voortgezet onderwijs was er niet alleen inhoudelijk nogal wat veranderd vergeleken met mijn eigen middelbareschooltijd. Ook op didactisch gebied waren er de nodige ontwikkelingen. Volgens de principes van het OSAEV-model werden nieuwe kennis en vaardigheden aangeleerd.

De afkorting OSAEV komt van de indeling van een leerproces in vijf fasen, namelijk Oriënteren, Sorteren, Abstraheren, Expliciteren en Verwerken. Tijdens het oriënteren is het de bedoeling dat de leerling goed inzicht krijgt in de aard van het probleem en relevantie voorkennis ophaalt. Tijdens het sorteren krijgt de leerling op basis van voorbeelden een idee in welke richting het antwoord op de vraag moet worden gevonden. Het abstraheren is een mentaal proces waarbij de leerling los komt van de sorteerfase en door de aangereikte voorbeelden heen helder voor ogen krijgt wat de oplossing is van het probleem. ("Ik begin het te begrijpen.") Tijdens het expliciteren leert de leerling zijn pas verworven inzicht onder woorden te brengen. ("De grafieken van een functie en zijn inverse zijn elkaars gespiegelde in de lijn $y = x$.") Tot slot moet de nieuwe kennis worden verwerkt door het maken van een aantal opdrachten.

Voor een methode als Moderne Wiskunde, die na de mammoetwet op de markt kwam, werkte vanuit dit didactisch principe. Begrippen werden vrijwel nooit direct geëxpliciteerd, maar de leerling moest eerst zelf op onderzoek uit vanuit een 'geproblematiseerde' situatie. Joop van Dormolen heeft met zijn boek *Didactiek van de Wiskunde* (Oosthoek's Uitgeversmaatschappij BV, 1974) dit didactisch model uitvoerig beschreven.

Bij de implementatie van het OSAEV-model in het wiskunde-onderwijs stond het klassengesprek centraal. De bedoeling was dat leerlingen een wiskundig probleem systematisch leerden aan te pakken. Kern van de lesvoorbereiding was dan ook het problematiseren van nieuwe leerstof. De docent stelde de vragen en activeerde leerlingen om mee te denken en antwoorden te geven. Dat lukte het beste wanneer de context van het probleem motiverend werkte, dus aansloot bij de belevingswereld van de leerling.

Eind jaren '70 ontstond de notie dat het curriculum voor Wiskunde 1 te zwaar was en onderdelen bevatte die minder relevant waren voor grote groepen leerlingen op het VWO, gelet op de (wiskundige) kennis die nodig was voor studies in de alfa- en gamma-richtingen. Het leidde in 1985 tot de invoering van Wiskunde A en B, respectievelijk een realistische wiskunde en een wiskunde met een meer traditioneel curriculum zoals analyse en meetkunde.

Al snel bleek dat grote delen van het leerplan Wiskunde A zich uitstekend leenden voor zelfstandige verwerking. Sterker nog, leerlingen moesten er vaak niets van hebben wanneer ik meende klassikaal iets te moeten bespreken. Antwoordenboeken en een goed leerboek waren voldoende voor de meeste leerlingen. De rol van de docent verander-

de. Er kwam een ontwikkeling, waarbij de docent meer doende was met individuele begeleiding en met het organiseren van het leerproces (studiewijzers, diagnostische toetsen, voortgangscontrole) dan met lesvoorbereiding en klassikale instructie. Het was niet langer alleen de docent die de vragen stelde. Er was voldoende contacttijd met leerlingen om het curriculum te halen. Begeleiding werd maatwerk.

Wiskunde B bleek in de praktijk evenwel een vak te zijn waarbij het klassengesprek een noodzakelijk didactisch middel was om leerlingen op het vereiste niveau te brengen. Het was een goed gevuld programma, waarbij de toegewezen contacttijd maar temauwernood toereikend was om er de einddoelen in te halen. Door de krappe tijd verkeerde de docent regelmatig in een soort spanningsveld. Er was enerzijds behoefte aan meer individuele begeleiding, anderzijds was het niveau en de omvang van de leerstof zodanig, dat het veelal nodig werd geacht om een strak klassikale regie te voeren over het leerproces.

Leerfuncties en zelfstandig leren

Dit verschil in didactische aanpak tussen Wiskunde A en Wiskunde B laat zich goed beschrijven met behulp van de terminologie van Robert-Jan Simons. In zijn boek *Leren en instructie* spreekt hij in dit verband over leerfuncties. Leerfuncties zijn psychologische functies die tijdens het leren moeten zijn vervuld, wil het studeren succesvol zijn. Het gaat bijvoorbeeld om het motiveren tot leren, het (willen en kunnen) geven van voorbeelden, het (willen en kunnen) verduidelijken van doelstellingen, het verschil weten tussen een argument en een bewijs en de behoefte een bewijs te geven van een stelling. Het aardige van het begrip leerfunctie is dat er mee in beeld gebracht kan worden in welke mate een leerling zelfstandig leert. De vraag is namelijk wie voor al die functies verantwoordelijk is: de docent of de leerling. Op een soort continuüm zijn drie markeringspunten aan te brengen. Het eerste punt markeert de didactische situatie waarbij de docent zoveel mogelijk de leerfuncties overneemt. De docent geeft aan dat een bewijs van de stelling noodzakelijk is en geeft het bewijs ook. Het tweede punt markeert de didactische situatie waarbij de docent de leerling prikkelt zelf een aantal leerfuncties over te nemen met vragen als 'Is dat altijd zo?', 'Wanneer heb je daarover absolute zekerheid?', enzovoort. Het derde punt markeert de didactische situatie, waarbij het volledig aan de leerling wordt overgelaten in hoeverre leerfuncties worden vervuld. De leer-

ling voert zelf de regie over zijn leren.

De manier waarop in veel gevallen Wiskunde A werd onderwezen in de loop van de jaren '90, toen de tweede fase van het voortgezet onderwijs nog niet met hoofdletters werd geschreven, wordt naar mijn opvatting het beste gekarakteriseerd door (de omgeving van) het tweede punt uit dit continuüm. De docent was wel degelijk aanwezig, voerde niet expliciet de regie over het leerproces, maar nam wel specifieke leerfuncties over wanneer de situatie daarom vroeg. Zoals gezegd, de begeleiding was sterk individueel en dus maatwerk. De didactische situatie wat betreft Wiskunde B daarentegen was meer geconcentreerd in de buurt van het eerste punt van het continuüm. De docent voerde doorgaans de regie over wat, wanneer, waar en hoe geleerd en toegepast moest worden.

Het 3-fasen model

Het model van Simons is regelmatig gehanteerd door scholen in de voorbereiding van de Tweede Fase als graadmeter in hoeverre de didactische situatie rijp was om vormen van zelfstandig leren te structureren in roosters door middel van bijvoorbeeld keuzewerktijdduren. Om leerlingen meer en beter zelfstandig te laten leren is het nodig dat zij zelf leerfuncties gaan overnemen. Dat gebeurt niet zo maar. Het vereist een didactiek, waarbij leerlingen studievaardiger worden. Het leerproces om een vaardigheid aan te leren gebeurt in drie fasen:

- Tijdens de eerste fase staat de docent *model*. Hij formuleert een probleem en gaat daarover hardop denkend filosoferen, zichzelf en de groep vragen stellend. Hij toont daarmee hoe je als ideale student met nieuwe en dus vaak problematische leerstof moet omgaan.
- Tijdens de tweede fase is de docent *activator*. De docent prikkelt leerlingen om de geleerde vaardigheid zelfstandig te oefenen in een nieuwe situatie. De docent blijft als het ware over de rug van de leerling meekijken of het goed gaat.
- Tijdens de derde fase is de docent *monitor*. Hij mag er in deze fase vanuit gaan dat de leerling de nieuwe vaardigheid zodanig beheerst dat zijn hulp niet meer nodig is. Controle door de docent vindt plaats via toetsing. Dit 3-fasen model voor het leren van vaardigheden is in de jaren '90 door verschillende onderwijskundigen nader uitgewerkt en gebruikt in trainingen om docententeams voor te bereiden op de Tweede Fase.

Bewijzen als wiskundige vaardigheid

Wat betekent dit voor het wiskunde-onderwijs van nu en in het bijzonder voor het aanleren van vaardigheden? Als voorbeeld neem ik de misschien wel meest fundamenteel wiskundige bezigheid, namelijk *bewijzen*. Daarvoor is nodig een mentale rust en een open en nieuwsgierige geest, waardoor men zich verwonderend vragen stelt. Verwondering wordt gestimuleerd in een inspirerende omgeving. Op de gemiddelde middelbare school in Nederland zijn dit geen vanzelfsprekende condities. Er is tijd nodig om aan deze voorwaarden te voldoen. Het onder woorden brengen van een hypothese of het stellen van een vraag is de explicitering van de verwondering. Dat is misschien wel het allermoeilijkste. Volgens Einstein is het moeilijker om het probleem te formuleren dan het op te lossen. Met andere woorden: ook hier is tijd voor nodig. Is men eenmaal zover — in de terminologie van Simons: zijn deze leerfuncties vervuld — dan moet een logische en verifieerbare redenering worden opgezet om de veronderstelling te bewijzen. Dat vereist, naast een creatieve en kritische geest, doorzettingsvermogen. Ook hier is dus tijd voor nodig. Tot slot behoort het bij de discipline van het vak om te reflecteren op het resultaat met vragen als 'Zijn er geen redeneerfouten gemaakt?' en 'Had het ook anders gekund?'. Alweer: dit kost tijd. In het Wiskunde B curriculum voor de Tweede Fase wordt expliciet aandacht gevraagd voor de vaardigheid bewijzen. Kortom, voor de bovenstaande mentale en intellectuele bezigheid. Het leerproces waarbij al die facetten zich ontwikkelen kost jaren van interactie tussen docent en leerling.

De praktijk

Op mijn school bestaat nog slechts zo'n 30% van de totale studielast voor de vakken Wiskunde B1 en Wiskunde B12 uit contacttijd en dat is geen uitzondering in Nederland. Het kan ook niet anders, gezien de overladenheid van het totale programma. Dat is de contradictie in de ideologie van de Tweede Fase. Meer vakken in minder tijd, uitgevoerd in de veronderstelling dat leerlingen over voldoende vaardigheden beschikken om op een efficiënte en effectieve wijze aan het curriculum te voldoen. Maar die veronderstelling klopt niet, zeker niet wat betreft wiskunde. Vaardigheden zul je moeten leren. Tenzij je bijzonder getalenteerd bent, is daar tijd voor nodig. En die tijd is er niet, met het gevolg dat sluimerend wiskundetalent onvoldoende gelegenheid krijgt zich te ontwikkelen. ◀