

Arthur Veldman

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
veldman@math.rug.nl

Roel Verstappen

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
verstappen@math.rug.nl

Turbulentie, golfballetjes en discrete afgeleiden

Waarom heeft een golfballetje kuiltjes maar trekt een schaatser juist een zo glad mogelijk pak aan? Hoe bepaal je van een kromme waarvan drie punten zijn gegeven een bruikbare helling in het middelste punt? Twee vragen die ogenschijnlijk niets met elkaar te maken hebben maar die, zoals dit artikel laat zien, via het onderzoek aan turbulentie bij elkaar komen.

Als je op een winderige herfst dag naar buiten kijkt, zie je de valende bladeren op een grillige manier door de lucht dwarrelen — de bladeren visualiseren de turbulente stroming die door de wind wordt opgewekt. Dit wanordelijke stromingspatroon staat tegenover het rustige patroon van een gelaagde, laminaire stroming waarin alle luchtdeeltjes strak in het gelid lijken te bewegen. Leonardo da Vinci was vijf eeuwen geleden al geïntrigeerd door het grillige gedrag van een turbulente stroming, en heeft daar schetsen van gemaakt, zoals figuur 1.

Stroperige lucht

Om enig gevoel te krijgen hoe turbulentie ontstaat beginnen we met de vergelijking die het gedrag van een stroming beschrijft — deze is reeds in de eerste helft van de 19^e eeuw opgesteld door Claude Navier (1822) en George Stokes (1845). 'Hun' vergelijking beschrijft behoud van impuls volgens de Tweede Wet van Newton en ziet er in dimensieloze vorm uit als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}}_{\text{convectie}} = -\text{grad } p + \underbrace{\frac{1}{Re} \text{div grad } \mathbf{u}}_{\text{diffusie}}$$

Daarnaast geldt behoud van massa: $\text{div } \mathbf{u} = 0$.

In bovenstaande behoudswetten stelt \mathbf{u} de snelheidsvector voor en p de geschaalde druk. Verder is Re een dimensieloos kental, geïntroduceerd door Osborne Reynolds (1883) als $Re = \rho U L / \mu$; hierin zijn U en L karakteristieke maten voor de snelheid van de stroming en de lengte van het omstroomde object, ρ is de dichtheid van het stromende medium (onsamendrukbaar verondersteld), terwijl μ de (constante) moleculaire viscositeit is. Het Reynoldsgetal, beter gezegd zijn omgekeerde, geeft ruwweg aan hoe belangrijk de viskeuze krachten (diffusie) zijn ten opzichte van de traagheidskrachten (convectie): hoe kleiner Re , hoe belangrijker de viskeuze krachten (dat wil zeggen hoe stroperiger de vloeistof).

	medium	snelheid in km/u	Reynolds
golfbal	lucht	250	$2 \cdot 10^5$
schaatser	lucht	40	$5 \cdot 10^5$
zwemmer	water	5	$2 \cdot 10^6$
auto	lucht	80	$5 \cdot 10^6$
haai	water	20	$2 \cdot 10^7$
vliegtuig	lucht	900	$5 \cdot 10^7$
schip	water	20	tot 10^9

Tabel 1 Reynoldsgetallen, in de praktijk.

Voor veel stromingen is Re erg groot (zie tabel 1), hetgeen de indruk wekt dat viskeuze krachten meestal niet belangrijk zijn. Dit heeft onderzoekers lange tijd op het verkeerde been gezet, maar aan het begin van de 20^e eeuw ontdekten Ludwig Prandtl en zijn collega's dat vlak langs de wand van een omstroomd lichaam vis-

cositeit wel degelijk een invloed heeft met grote gevolgen: zonder deze stroperigheid zou een fietser geen last hebben van tegenwind, maar ook zouden vogels (en vliegtuigen) niet kunnen vliegen!

Het is in deze dunne grenslaag dat een stroming al of niet turbulent wordt. Dit hangt af van de grootte van het Reynoldsgetal: hoe groter Re , hoe makkelijker turbulent. Ook ruwheid van de wand helpt om een stroming turbulent te maken — daar komen we straks op terug. Wat verder opvalt in tabel 1 is dat stromingen in lucht een lager Reynoldsgetal hebben dan soortgelijke stromingen in water. Met andere woorden, lucht is stroperiger dan water! Het mag tegen je gevoel in zijn, maar het klopt wel: de moleculaire viscositeit μ van lucht is ongeveer honderd keer kleiner dan die van water, maar omdat de dichtheid ρ van lucht duizend keer kleiner is, is de relatieve invloed van de viscositeit in lucht zo'n tien keer groter dan in water.

Energiecascade

Turbulentie wordt gecreëerd door de convectieve termen in de Navier-Stokes vergelijking. Om dit te illustreren, nemen we aan dat er in de x -component van de snelheid een golfje (wervel) zit van de vorm $u = \sin \omega x$, en laat de overige snelheidscomponenten voor de eenvoud gelijk nul zijn. Als we de convectieve term in de x -component van de Navier-Stokesvergelijking uitschrijven verschijnt onder andere de volgende bijdrage

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \omega \sin \omega x \cos \omega x = \frac{1}{2} \omega \sin 2\omega x.$$

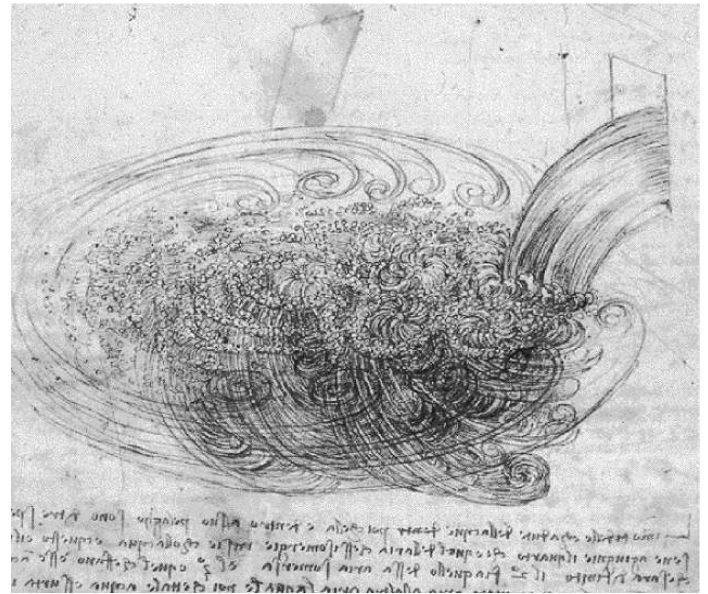
Deze term heeft een twee keer zo hoge frequentie en daarmee een twee keer kleinere golflengte. Via de tijdsafgeleide komt deze kortere golf daarna in de snelheid zelf terecht. Dit proces kun je voortzetten, en er ontstaan steeds kleinere schalen in de stroming. Deze 'cascade' van grote wervels naar kleine wervels stopt pas wanneer de diffusieve term in de Navier-Stokes vergelijking ingrijpt. Deze is in ons voorbeeld gelijk aan

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{Re} \sin \omega x,$$

en we zien dat voor toenemende frequenties (kortere golven) deze term kwadratisch groeit, terwijl de convectieve term 'slechts' lineair groeit. Als ω groter wordt, wordt de diffusieve term dus belangrijker, en zodra $\omega \sim Re$ is deze ongeveer even groot als de convectieve term. Beide bijdragen kunnen elkaar gaan compenseren, zodat in de tijdsafgeleide geen hogere frequenties meer ontstaan: we zijn bij de kleinste schaal aangekomen. Dit proces heeft de meteoroloog Lewis Fry Richardson in 1922 verwoord als:

*Big whirls have little whirls,
Which feed on their velocity,
And little whirls have lesser whirls,
And so on to viscosity.*

Bovenstaande afleiding is wat heuristisch en suggereert dat de kleinste lengteschalen zich gedragen als $1/Re$; dit is dan ook niet helemaal juist. Kolmogorov heeft in 1941 beargumenteerd dat de diffusieve term op een iets grotere schaal, evenredig met $Re^{-3/4}$, al voldoende invloed heeft om de cascade naar steeds kleinere schalen te beëindigen (zie bijvoorbeeld [1]).

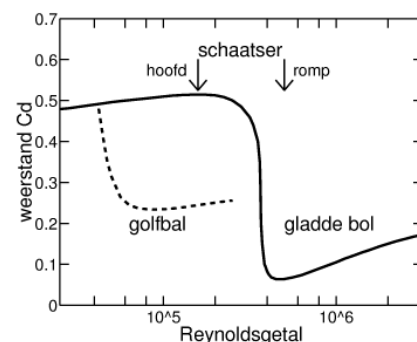


Figuur 1 Leonardo da Vinci: schets van een turbulente stroming

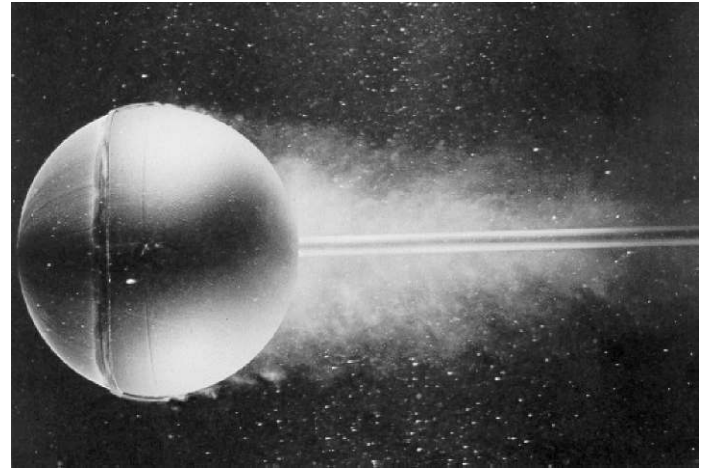
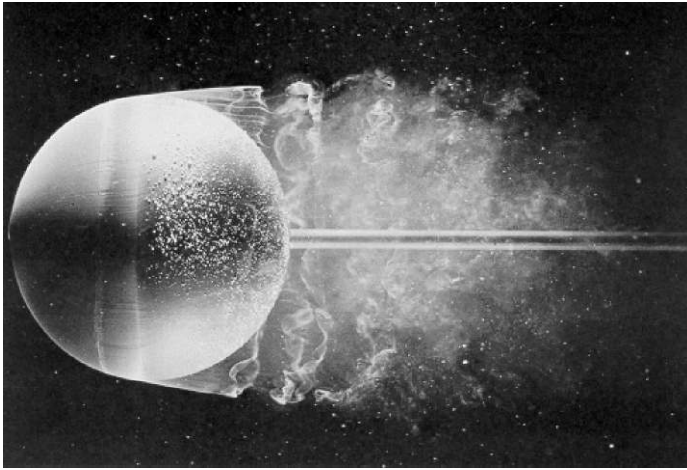
Voor- en nadelen van turbulentie

Turbulentie betekent beweging en dus energie, en die moet ergens vandaan komen. Vandaar dat turbulente stroming tot een hoger energieverbruik leidt bij alles wat rijdt, vaart of vliegt. Met name in de vliegtuigwereld worden pogingen gedaan om een stroming zo lang mogelijk laminair te houden. Ook de gladde schaatspakken, zo'n kwart eeuw geleden door Franz Krienbühl geïntroduceerd, zijn bedoeld om turbulentie zoveel mogelijk te voorkomen — hierover straks meer. Maar turbulentie heeft ook zijn voordelen. In verwarmingsketels en verbrandingsmotoren zorgt het voor een betere menging van het brandstof-lucht mengsel en daardoor voor een efficiëntere verbranding. En ook in de sport vervult turbulentie soms een nuttige functie.

Kijk, om dit te begrijpen, allereerst naar figuur 2, waarin de weerstand van een bol als functie van het Reynoldsgetal wordt getoond. Wat opvalt is dat rond $Re = 300000$ de weerstand plotseling sterk afneemt, met een factor zes ongeveer. Wat is hier aan de hand? Voor kleinere Re is de grenslaag rond de bol laminair. Dit klinkt gunstig, maar een laminaire stroming is slecht in staat om de ronding van het oppervlak te volgen en de stroming laat vroegtijdig los; er ontstaat een dik zog waardoor de luchtweerstand relatief groot is. Voor grotere Re wordt de grenslaag 'op tijd' turbulent (dit gaat ten koste van wat extra weerstand), maar daarna kan de stroming de ronding beter volgen, zodat het zog



Figuur 2 Stromingsweerstand van bolachtige lichamen als functie van het Reynoldsgetal



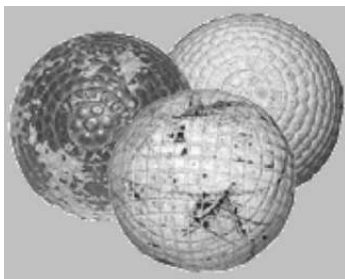
Figuur 3 Verskil in stroming tussen een laminaire (links) en een turbulente grenslaag (rechts) [2]

dunner wordt en de weerstand flink vermindert. Figuur 3 toont twee opnames van de stroming rond een bol, waarbij in de ene opname de grenslaag laminair is, terwijl deze in de andere kunstmatig turbulent is gemaakt (met een plakbandje op het oppervlak). Het grote verschil in zogdijkte is goed zichtbaar.

Sport en turbulentie

Bij een golfballetje wordt van dit effect gebruik gemaakt. De stroming rond het balletje heeft een Reynoldsgetal rond 200000, hetgeen niet genoeg is om de stroming uit zichzelf turbulent te maken. Door nu kuiltes aan te brengen in het oppervlak van het balletje (figuur 4) forceert men de stroming om turbulent te worden. Hierdoor blijft de stroming langer aanliggen, met als gevolg dat de luchtweerstand ongeveer halveert en je het balletje veel verder weg kunt slaan [3–4]. De kunst bij dit alles is om de stroming zo lang mogelijk laminair te houden, en op het laatste moment — vlak voordat de laminaire stroming zou willen loslaten — de omslag naar turbulent te bewerkstelligen.

Ook in de schaatssport kent men dit effect. Krienbühl's glatte schaatspak zorgt er in eerste instantie voor dat de stroming langer laminair blijft, met het bijbehorende gunstige gevolg voor de aerodynamische weerstand. Gelukkig is de romp van een schaatser lang genoeg om de stroming, ook bij een glad pak, op tijd turbulent te laten worden — herinner de lengteschaal L in de definitie van Re — en voortijdige loslating wordt zo vermeden. Maar een mensenhoofd is wat kleiner, en daarmee de corresponderende waarde van Re , die onder de grens komt waar de stroming van nature omslaat (figuur 2). Sommige schaatseren brengen dan ook strips aan op hun voorhoofd om de stroming te helpen turbulent te worden (zie bijvoorbeeld [5]).



Figuur 4 Golfballetjes uit het eind van de 19de eeuw

Rekenen en modelleren

Wanneer je gedetailleerd wilt rekenen aan turbulente stromingen is het noodzakelijk om rekenrooster en tijdstap aan te passen aan de kleinste schaal in de stroming — dit heet directe numerieke simulatie (DNS). Kolmogorov's hypothese stelt dat de kleinste wervels schalen met $Re^{-3/4}$, met een bijbehorende tijdschaal $Re^{-1/2}$. Als gevolg groeit, in drie dimensies, de rekencomplexiteit van een turbulente stroming evenredig met

$$(Re^{3/4})^3 \times Re^{1/2} = Re^{11/4}.$$

Dus een tien keer hoger Reynoldsgetal betekent dat de berekening bijna duizend keer lastiger wordt! Tabel 2 geeft een indicatie van de benodigde rekenkracht voor het uitvoeren van directe numerieke simulaties van turbulente stromingen. Ter vergelijking, de nieuwe nationale supercomputer die onlangs bij SARA in Amsterdam is geïnstalleerd heeft een theoretische topsnelheid van 1 Tflo/s. Een berekening van de stroming rond een golfballetje is daarop (net) haalbaar, maar voor de andere toepassingen zullen we veel geduld nodig hebben.

	<i>golfbal</i>	<i>zwemmer</i>	<i>haai</i>
Reynoldsgetal	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^7$
roosterpunten	10^9	$3 \cdot 10^{11}$	10^{14}
bewerkingen (flops)	10^{17}	10^{20}	10^{23}
rekensnelheid (300 uur/som)	100 Gflop/s	100 Tflop/s	100 Pflop/s
geheugen	100 Gbyte	30 Tbyte	10 Pbyte

Tabel 2 Rekeninspanning, vereist voor directe numerieke simulatie van turbulentie (flops=floating-point operaties; G=giga= 10^9 ; T=tera= 10^{12} ; P=peta= 10^{15}).

Vandaar dat in de ingenieurspraktijk de turbulente details van een stroming worden gemodelleerd. Hierbij wordt geprobeerd met behulp van geschikt gekozen vergelijkingen, op een globale manier de invloed van de turbulentie op de stroming te beschrijven, zonder alle details zelf uit te hoeven rekenen. Met onze, nog altijd beperkte, kennis van turbulentie toont de praktijk een zeer uitgebreid scala aan turbulentiemodellen, die onderling verschillen in het deel van de turbulente lengte- en tijdschalen dat wordt gemodelleerd. Veel voorkomende strategieën zijn RaNS (Reynolds-gemiddeld Navier-Stokes) waarin alle effecten van turbulentie worden gemodelleerd, en LES (large eddy simulatie) waarin de grote turbulente wervels (eddies) in de stroming

door het rekenrooster worden opgelost en alleen de kleinste details worden gemodelleerd. Omdat er nu met een (veel) grover rekenrooster kan worden volstaan, wordt de rekeninspanning ten opzichte van tabel 2 enkele ordes kleiner, maar de betrouwbaarheid van de resultaten neemt af. Met name zodra de stroming recirculatiegebieden gaat vertonen (wervels) worden de details van turbulentie een stuk belangrijker en laat de modellering nog vaak te wensen over. Voorbeelden zijn de turbulente menging in de verwarmingsketel bij u thuis of in de motor van uw auto, en ook de stroming rond een golfballetje of een schaatser valt in de categorie waar turbulentiemodellering tot op heden tekort schiet.

En als je dan toch een betrouwbaar antwoord wilt, is het enige dat rest een berekening uit te voeren met alle details erop en eraan, en dus met bovengenoemd kostbaar prijskaartje! Echter, tegelijkertijd ligt er hier voor numeriek wiskundigen een grote uitdaging en daar gaat het vervolg van dit artikel over.

Discrete afgeleiden

Om de essentie van turbulentie, ook numeriek, goed te beschrijven moet de turbulente energiecascade via de convectieve term in de Navier-Stokes vergelijking nauwkeurig behandeld worden. Deze cascade eindigt als de diffusie door moleculaire viscositeit in evenwicht is met het convectief transport naar kleinere lengteschalen. Het is ongewenst als numerieke onnauwkeurigheden zich met deze subtiele balans tussen convectie en diffusie gaan bemoeien.

Aangezien convectie wordt beschreven door een eerste-orde afgeleide, leidt dit tot de ogenschijnlijk simpele vraag hoe je een eerste afgeleide discreet zou moeten benaderen. Wiskundiger geformuleerd: Gegeven een drietal punten (x_-, y_-) , (x_0, y_0) , (x_+, y_+) waar een gladde kromme $y = f(x)$ doorheen gaat; gevraagd een schatting voor de helling van de kromme in het middelste punt, dat wil zeggen $f'(x_0)$ (zie figuur 5).

Bijna elk schoolboek zal zeggen dat je voor de beide buurpunten een Taylorreeks moet opschrijven en deze zo moet combineren dat zoveel mogelijk termen wegvallen. Het resultaat na enig cijferwerk ziet eruit als

$$f'(x_0) \approx \frac{h_-^2 y_+ + (h_+^2 - h_-^2) y_0 - h_+^2 y_-}{h_+ h_- (h_+ + h_-)}, \tag{1}$$

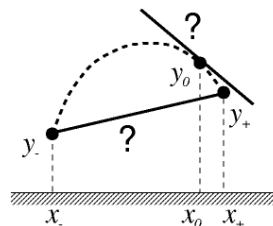
met $h_+ = x_+ - x_0$ en $h_- = x_0 - x_-$. Trouwens, je komt op dezelfde formule wanneer je door dit drietal punten een parabool legt. Deze formule is geïnspireerd door het minimaliseren van de lokale afbreekfout. Maar is dit een criterium met een fysische achtergrond? Denkend aan de convectieve energiecascade die pas eindigt na ingrijpen van de diffusie op de kleinste schalen, zou je eigenlijk willen dat ook in gediscretiseerde vorm convectie energiebehoudend is. En dit is een heel ander soort criterium voor discretisatie van een afgeleide. Laten we eens kijken welke gevolgen dit heeft.

Energiebehoud en symmetrie

Om discreet energiebehoud te analyseren bekijken we een in de ruimte gediscretiseerd dynamisch systeem

$$\frac{d\phi_h}{dt} - L_h \phi_h = 0, \tag{2}$$

waarin ϕ_h is gedefinieerd in de punten van het rekenrooster, ter-



Figuur 5 Twee manieren om de helling van een kromme te schatten. Welke is beter en waarom?

wijl L_h de discretisatie van de ruimtelijke afgeleiden representeert. Analoog aan de kinetische energie ($\frac{1}{2}mv^2$) kan de energie van de oplossing van (2) gedefinieerd worden als $\|\phi_h\|_h^2 \equiv \phi_h^* \Omega \phi_h$, waarbij Ω een (reële) diagonaal matrix is die de grootte van de roostercellen weergeeft. Deze ‘kinetische’ energie evolueert in de tijd volgens

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_h\|_h^2 &= (L_h \phi_h)^* \Omega \phi_h + \phi_h^* \Omega L_h \phi_h \\ &= \phi_h^* ((\Omega L_h)^* + \Omega L_h) \phi_h. \end{aligned} \tag{3}$$

Het rechterlid is nul, dat wil zeggen dat de energie wordt behouden, dan en slechts dan als ΩL_h scheef-symmetrisch is.

Energiebehoud tijdens de convectieve energiecascade vereist derhalve dat de discretisatie van convectie scheef-symmetrisch is. We zien echter meteen dat de traditionele discretisatie (1) zeker niet scheef-symmetrisch is, omdat op een niet-uniform rooster de diagonaal (waar de coëfficiënt van y_0 staat) niet nul is. De alternatieve schatting voor de helling aangegeven in figuur 5, simpelweg een rechte lijn trekken tussen de beide buurpunten, leidt tot de volgende discretisatie

$$f'(x_0) \approx \frac{y_+ - y_-}{x_+ - x_-} = \frac{y_+ - y_-}{h_+ + h_-}. \tag{4}$$

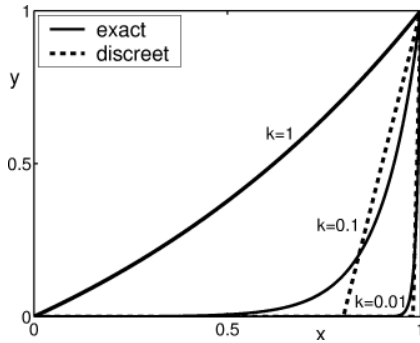
Het is duidelijk dat na schaling met de noemer, door $\Omega = h_+ + h_-$ te kiezen, nu wel een scheef-symmetrische bijdrage tot de coëfficiëntenmatrix ΩL_h ontstaat, alleen krijg je hierbij niet meteen een gevoel van hoge nauwkeurigheid. Welke van deze twee effecten in de praktijk domineert zullen we straks gaan onderzoeken.

De discretisatie van een tweede-orde afgeleide is meer eenduidig. Het interpoleren met een parabool (het zo gunstig mogelijk combineren van Taylorreeksen) leidt tot de volgende formule

$$f''(x_0) \approx \frac{h_- y_+ - (h_+ + h_-) y_0 + h_+ y_-}{\frac{1}{2} h_+ h_- (h_+ + h_-)}.$$

Deze uitdrukking levert, na eerder gebruikte schaling, een symmetrisch negatief-definiete bijdrage tot de coëfficiëntenmatrix — geheel in lijn met de analytische eigenschappen van diffusie. In combinatie met een scheef-symmetrische discretisatie van convectie, toont (3) dat de discrete energie afneemt en het discrete dynamische systeem stabiel is — er is dus geen aanleiding om naar een andere diffusieve discretisatie te zoeken. In wiskundiger termen liggen in deze situatie alle eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix in het stabiele halfvlak, zodat in het bijzonder deze matrix niet singulier kan worden.

Deze laatste eigenschap blijkt belangrijk te zijn wanneer we naar de relatie tussen globale en lokale fout kijken. Beschouw hier toe een continue stationaire vergelijking $L\phi = f$ met als discrete benadering $L_h \phi_h = f_h$. De globale discretisatiefout $\phi - \phi_h = L_h^{-1} \tau_h$ is het product van de lokale afbreekfout $\tau_h (\equiv L_h \phi - f_h)$ en



Figuur 6 De oplossing van de convectie-diffusie vergelijking voor afnemende waarden van de diffusiecoëfficiënt k . De onderbroken lijn geeft de discrete oplossing weer, behorend bij de symmetriebewarende discretisatie op een rooster met slechts één inwendig roosterpunt (gelegen in $x = 1 - 2k$).

de inverse van de gediscrètiseerde operator L_h . Hierdoor kan een zich slecht gedragende inverse gunstige eigenschappen van een afbreekfout tenietdoen.

Testcase convectie-diffusie

Tot dusver zijn de overwegingen voornamelijk kwalitatief van aard geweest. Het kwantitatieve verschil tussen beide convectieve discretisaties maken we zichtbaar met een concreet voorbeeld: een eendimensionale convectie-diffusievergelijking

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \tag{5}$$

op het interval $x \in [0, 1]$ met randvoorwaarden $\phi(0) = 0$ en $\phi(1) = 1$. De oplossingen van deze vergelijking zien eruit als in figuur 6; ze vertonen een grenslaagkarakter met dikte k .

Eerst een kleine smaakmaker. Met een approximatiethoretisch oog zou je de analytische oplossing voor kleine k heel aardig moeten kunnen benaderen met twee rechte lijnstukken: een horizontale lijn en een lijn steil omhoog, met slechts één inwendig roosterpunt ergens op een afstand $O(k)$ vanaf $x = 1$. Zouden er ook discretisatieformules bestaan waar zo'n benadering als oplossing uitkomt? Daarom tonen we voor de aardigheid in figuur 6 ook de discrete oplossing van (5) voor de symmetriebewarende methode (4) bij gebruik van een rekenrooster met slechts één (!) inwendig punt. Als dit punt ligt in $x = 1 - 2k$ dan geeft deze discretisatie een heel aardig resultaat. Bereken zelf eens de oplossing voor de methode uit (1) en constateer dat deze er veel minder fraai uitziet.

Na dit intrigerende succesje van de symmetriebewarende discretisatie presenteren we nu een hogere-orde variant hiervan, waarna we beide varianten aan een vergelijking met de traditionele Lagrange aanpak zullen onderwerpen. Om ruimte te besparen laten we details van de afleiding hier achterwege (zie bijv. [6-7]) en geven alleen de betreffende discretisatieformules

$$\begin{aligned} \Omega_i \frac{\partial \phi}{\partial x} &\approx \frac{1}{2}(-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}), \\ \Omega_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &\approx 8 \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) - \\ &\quad \left(\frac{\phi_{i+2} - \phi_i}{x_{i+2} - x_i} - \frac{\phi_i - \phi_{i-2}}{x_i - x_{i-2}} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

met

$$\Omega_i = \frac{1}{2}(-x_{i+2} + 8x_{i+1} - 8x_{i-1} + x_{i-2}).$$

In één oogopslag is duidelijk dat de bijdrage van (6) tot de coëfficiëntenmatrix inderdaad scheef-symmetrisch is. Op uniforme roosters staat hier de gewone vierde-orde methode gebaseerd op Lagrange interpolatie, maar op niet-uniforme roosters verschilt de methode aanzienlijk! Om dit te demonstreren gaan we (5) oplossen op een glad rekenrooster met een constante rekkingfactor tussen twee opeenvolgende mazen (op minder regelmatige roosters zijn de bevindingen trouwens vergelijkbaar [7-8]). We zorgen ervoor dat de helft van de roostercellen in de grenslaag ligt, hier gedefinieerd als het interval $[1 - 10k, 1]$.

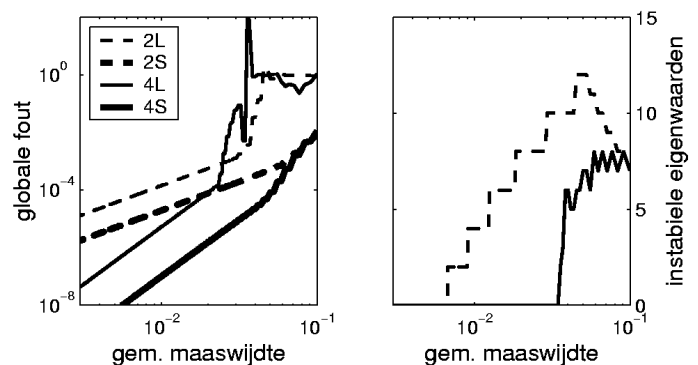
Figuur 7 (links) toont, als functie van de gemiddelde maaswijdte, de discrete fout $\|\phi_h - \phi_{\text{exact}}\|_h$ voor vier discretisatiemethoden (bij $k = 0.001$):

- (2L) de traditionele tweede-orde Lagrange methode;
- (2S) de tweede-orde symmetriebewarende methode;
- (4L) de traditionele vierde-orde Lagrange methode;
- (4S) de vierde-orde symmetriebewarende methode.

Opvallend is dat op relatief grove (en fors gerekte) roosters de Lagrangemethoden slecht presteren. De vierde-orde methode is hier zelfs inferieur aan zijn tweede-orde bloedverwant. De pieken in de fout worden veroorzaakt door een coëfficiëntenmatrix die bijna singular is. Voor grove roosters ligt een aantal eigenwaarden in het instabiele halfvlak (zie figuur 7, rechts). Bij roosterverfijning schuiven deze naar het stabiele halfvlak, waarbij ze de imaginaire as soms vlakbij de oorsprong passeren met (bijna) singulariteit tot gevolg. Even terzijde: zolang er nog eigenwaarden in het instabiele halfvlak liggen kun je tijdsintegratie van (5), of iteratief oplossen van het stationaire probleem, wel vergeten. De gepresenteerde resultaten zijn dan ook via een directe oplosmethode verkregen.

In schril contrast hiermee gedraagt de symmetriebewarende discretisatie zich veel goedmoediger. De discretisatiefout is voor alle roosters regelmatig en beduidend kleiner dan bij de traditionele aanpak. In figuur 7 is af te lezen dat om een discretisatiefout in de orde van 10^{-4} te krijgen, de maaswijdte van het rooster ruwweg twee à drie keer grover kan worden gekozen. Bij instationaire driedimensionale problemen betekent dat een efficiëntiewinst van een à twee ordes voor de symmetriebewarende methode. Bovendien liggen de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix altijd in het stabiele halfvlak, zodat het volledige arsenaal aan iteratieve tijdsintegratiemethoden toegepast kan worden.

Ter verdere positionering van de symmetriebewarende discre-

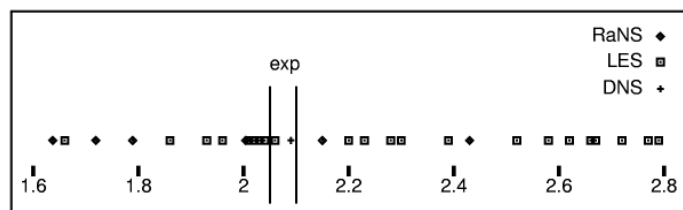


Figuur 7 Links het gedrag van de globale fout bij roosterverfijning van de convectie-diffusievergelijking ($k = 0,001$) voor de traditionele Lagrangemethode (L) en voor de symmetriebewarende methode (S). Rechts het aantal eigenwaarden in het instabiele halfvlak bij de Lagrange methode.

tisatiemethode nog een paar opmerkingen. Allereerst kan deze methode worden afgeleid in een eindige-volume raamwerk [7], waardoor voor stromingsproblemen, naast discreet convectief energiebehoud, ook discreet impulsbehoud geldt. Ook is de methode af te leiden via een coördinatentransformatie. Tenslotte past de 2e-orde variant (4) in een eindige-elementen (Galerkin) kader [8].

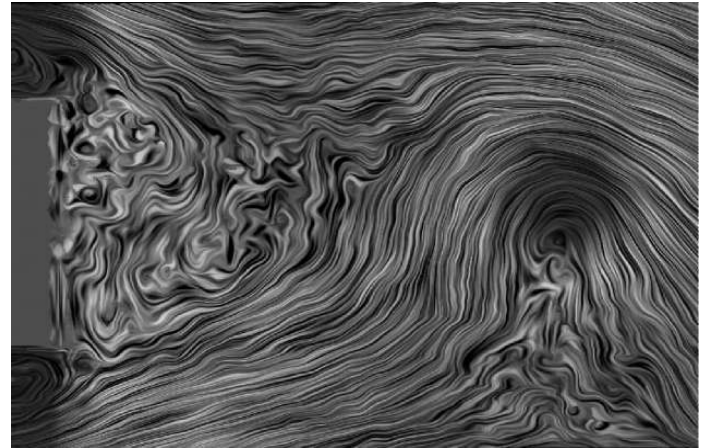
Toepassing bij DNS

Het stabiele gedrag van de symmetriebewarende discretisatiemethode op grovere roosters maakt deze een ideale kandidaat voor het uitvoeren van directe numerieke simulaties van turbulentie (DNS), waar gewoekerd moet worden met roosterpunten (zie tabel 1). Als voorbeeld bespreken we hier de stroming rond een rechthoekig blokje bij een Reynoldsgetal van 22000. Figuur 9 toont een snapshot van het snelheidsveld.



Figuur 8 Weerstand van een blokje zoals berekend door diverse RaNS, LES en DNS methoden, vergeleken met het experiment. Merk de grote spreiding op in de gevonden waarden, veroorzaakt door turbulentiemodellering en numerieke discretisatiefouten; de symmetriebewarende DNS berekening komt goed overeen met het experiment.

De resultaten van deze stromingsberekening zijn gevalideerd met behulp van experimenten, en langs deze weg kunnen we de kwaliteit van de numerieke aanpak vaststellen. Ook is deze stroming onderwerp geweest van een aantal workshops voor LES en DNS, zodat er veel vergelijkingsmateriaal met andere rekenmethoden aanwezig is; figuur 8 geeft daarvan een samenvatting. Horizontaal uitgezet staat hier de weerstand van het blokje zoals gevonden door de diverse rekenmethoden (RaNS, LES en DNS); ook de experimenteel gevonden waarde is aangegeven. Een grote spreiding valt op, die veroorzaakt wordt door onnauwkeurigheden in de turbulentiemodellering en door numerieke discretisatiefouten. Het DNS antwoord (zonder modellering en met een symmetriebewarende discretisatie) komt uit binnen de experimentele onnauwkeurigheid. Het rooster gebruikt voor DNS is



Figuur 9 Computersimulatie van de turbulente stroming achter een blokje. Visualisatie door middel van de 'spot noise' methode [8].

vergelijkbaar met de roosters van de andere methoden (hier profiteren we van de winst in maaswijdte die hierboven is voorspeld), waarmee de kracht van de symmetriebewarende discretisatie is aangetoond.

Toekomst

In 1932 heeft Sir Horace Lamb, die toen 83 was, gezegd:

"I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantumelectrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic."

Het beeld dat Lamb schetst biedt, tot op de dag van vandaag, een grote uitdaging voor zowel fysici als (numeriek) wiskundigen. De afgelopen jaren is het begrip achter de numerieke wiskunde gestaag gegroeid. In dit verhaal hebben we gezien dat een tegendraadse numerieke aanpak tot succes kan leiden. Ons antwoord op de vraag in het onderschrift van figuur 5 zal u inmiddels duidelijk zijn, en wie weet welke positieve verrassingen de numerieke wiskunde nog meer in petto heeft. Met dergelijke sprongen voorwaarts worden meer en meer complexe turbulente stromingen toegankelijk voor computersimulaties, waarvan de resultaten zullen helpen om de geheimen van turbulentie verder te ontsluit-
eren.

Literatuur

- 1 F.T.M. Nieuwstadt, *Turbulentie*, Epsilon Uitgaven nr. 24, Utrecht, 1992.
- 2 M. van Dyke, *An album of fluid motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- 3 T.P. Jorgensen, *The Physics of Golf*, services.golfweb.com/library/books/pog/pog1.html.
- 4 P. Moin and J. Kim, Tackling turbulence with supercomputers. *Scientific American*, January 1997, 46–52.
- 5 home.conceptsf.nl/~rivala/ribb_sch.htm
- 6 R.W.C.P. Verstappen and A.E.P. Veldman, Spectro-consistent discretization of Navier-Stokes: a challenge to RANS and LES. *J. Engng. Math.*, 34:163–179, 1998.
- 7 A.E.P. Veldman and R.W.C.P. Verstappen, Higher-order discretization methods for CFD. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 17:195–204, 1999.
- 8 A.E.P. Veldman and K. Rinzeema, Playing with nonuniform grids. *J. Engng. Math.*, 26:119–130, 1991.
- 9 W. de Leeuw, *Presentation and Exploration of Flow Data*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1997.