UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2001. Voor een ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

De Universitaire Wiskunde Competitie wordt gesponsord door Optiver Derivatives Trading en wordt tevens ondersteund door bijdragen van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde en de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft.

Opgave A

Toon aan dat voor alle positieve gehele n er een permutatie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ van $1, 2, \ldots, n$ bestaat zo, dat $a_j \mid \sum_{i=1}^{j} a_i$ voor alle $j = 1 \ldots n$. Voor $n = 9$ is 8 4 3 5 1 7 2 6 9 een voorbeeld van een dergelijke permutatie. Bepaal zoveel mogelijk van dergelijke permutaties.

Opgave B

Twee platte linten worden als een kruis over elkaar gelegd en op het kruispunt aan elkaar gelijmd. De bovenzijde van het kruis wordt rood gekleurd, de onderzijde groen. De vier losse uiteinden worden eveneens aan elkaar geplakt, nadat ieder van de uiteinden een geheel aantal slagen gedraaid is; de kleuren sluiten aan. Er ontstaat zo een ruimtelijke figuur met twee kruispunten die viervoudig verbonden zijn. Langs ieder verbindingsstuk is draaiing mogelijk.
Kan zo'n figuur altijd uit een torus geknipt worden?

Opgave C

Los het volgende stelsel algebraïsche vergelijkingen op:

$$\sum_{i=1}^{r} \binom{2r}{2i-1} x_i = 1 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ster-opgave

Gegeven n $(n \times n)$-matrices met complexe coëfficiënten, A_i, zodanig dat voor alle i en j de i-de kolom van A_j gelijk is aan de j-de kolom van A_i. Bovendien geldt dat iedere $\mathbf{C}$-lineaire combinatie van deze n matrices nilpotent is (een matrix B heet *nilpotent* als $B^k = 0$ voor een zekere $k \geq 1$). Vorm een $n \times n^2$ matrix door de gegeven n matrices naast elkaar te zetten. Zijn de rijen van deze matrix afhankelijk?

Editie 2001/1

Op de ronde 2001/1 ontvingen we 5 inzendingen. Op de ster-opgave hebben we nog geen respons gekregen.

Opgave 2001/1-A Zij V de verzameling

$$\{(m,n) \;:\; 1 \leq m, n \leq N,\; m+n \geq N+1,\; \mathrm{ggd}\,(m,n) = 1\}.$$

Bewijs dat

$$\sum_{(m,n)\in V} \frac{1}{mn} = 1.$$

Oplossing Om de afhankelijkheid van V van N uit te drukken schrijven we V_N in plaats van V en geven we de bijbehorende som aan met S_N:

$$S_N = \sum_{(m,n)\in V_N} \frac{1}{mn}.$$

Dan geldt $V_1 = \{(1,1)\}$ en dus $S_1 = 1$.
Stel nu $N \geq 2$. Dan geldt $(N,N) \notin V_N$ en

$$S_N - S_{N-1} = \sum_{(m,n)\in V_N \setminus V_{N-1}} \frac{1}{mn} - \sum_{(m,n)\in V_{N-1} \setminus V_N} \frac{1}{mn} =$$
$$= \sum_{m}^{*} \frac{1}{mN} + \sum_{n}^{*} \frac{1}{Nn} - \sum_{m}^{*} \frac{1}{m(N-m)},$$

UWC oplossingen

waarbij de $*$ boven het somteken aangeeft dat de sommatievariabele geheel, ≥ 1, $\leq N$ en met N onderling ondeelbaar is. Nu is $\sum_n^* 1/Nn$ te schrijven als $\sum_m^* 1/N(N-m)$ en dus

$$S_N - S_{N-1} = \sum_m^* \left\{ \frac{1}{mN} + \frac{1}{N(N-m)} - \frac{1}{m(N-m)} \right\} = \sum_m^* 0 = 0.$$

Conclusie: $S_N = 1$ voor alle $N \geq 1$.

Opgave 2001/1-B
Bewijs voor alle $z \in \mathbf{C}$ de ongelijkheid

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k \right| \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{|z|^2}{k} e^{\mathrm{Re}\, z + \frac{1}{2}\frac{|z|^2}{k}}.$$

Oplossing Stel $f(z) = e^{-z}(1+z)$. Na delen door $|e^z| = e^{\mathrm{Re} z}$ gaat de bewuste ongelijkheid over in de volgende ongelijkheid:

$$\left| 1 - f\left(\frac{z}{k}\right)^k \right| \leq \frac{|z|^2}{2k} \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{|z|^2}{2k}\right). \tag{1}$$

Voor $k = 1$ geldt

$$|1 - f(z)| \leq \frac{|z|^2}{2} \exp(|z|) \leq \frac{|z|^2}{2} \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{|z|^2}{2}\right), \tag{1a}$$

want door machtreeksontwikkeling zien we direct dat

$$|1 - f(z)| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^2}{2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n+2} \frac{z^n}{n!} \right| \leq$$
$$\leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \frac{|z|^2}{2} \exp(|z|).$$

Dit bewijst (1) voor $k = 1$.
Vervangen we in (1a) de variabele z door z/k, dan vinden we:

$$\left| 1 - f\left(\frac{z}{k}\right) \right| \leq \frac{|z|^2}{2k^2} \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{|z|^2}{2k^2}\right). \tag{2}$$

Voor het bewijs van (1) voor $k \geq 2$ hebben we nog een afschatting nodig voor $|f(z)|$. Stel $x = \mathrm{Re} z$ en $c = |z|$. Dan geldt $-c \leq x \leq c$ en

$$\log|f(z)| = \log|\exp(-z + \log(1+z))| = \mathrm{Re}(-z + \log(1+z)) =$$
$$= -x + \log|1+z| = -x + \tfrac{1}{2}\log(1 + 2x + c^2).$$

Deze functie van x is, voor $x \geq -\frac{1}{2} - \frac{c^2}{2}$, maximaal in het punt $x = -\frac{c^2}{2}$ met waarde $\frac{c^2}{2}$. Daar $[-c, c]$ bevat is in het interval $[-\frac{1}{2} - \frac{c^2}{2}, \infty)$ geldt dus zeker $|f(z)| \leq \exp(\frac{c^2}{2})$. Dus ook, met z/k in plaats van z,

$$\left| f\left(\frac{z}{k}\right) \right| \leq \exp\left(\frac{|z|^2}{2k^2}\right).$$

Nu is in

$$\left| 1 - f\left(\frac{z}{k}\right)^k \right| = \left| 1 - f\left(\frac{z}{k}\right) \right| \cdot \left| 1 + f\left(\frac{z}{k}\right) + \cdots + f\left(\frac{z}{k}\right)^{k-1} \right| \tag{3}$$

de tweede factor af te schatten met

$$\begin{aligned} \left| 1 + f\left(\frac{z}{k}\right) + \cdots + f\left(\frac{z}{k}\right)^{k-1} \right| &\leq 1 + \exp\left(\frac{|z|^2}{2k^2}\right) + \cdots + \left\{ \exp\left(\frac{|z|^2}{2k^2}\right) \right\}^{k-1} \leq \\ &\leq k \left\{ \exp\left(\frac{|z|^2}{2k^2}\right) \right\}^{k-1} = k \exp\left(\frac{|z|^2}{2k}\right) \exp\left(-\frac{|z|^2}{2k^2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

De gewenste ongelijkheid (1) volgt nu door combinatie van (2), (3) en (4).

UWC oplossingen

Opgave 2001/1-C
Voor $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 1$, en $\alpha \in (0,1) \subset \mathbf{R}$ definiëren we

$$S(x,\alpha) := \sum_{1 \leq k \leq x} \left[\left\{ \frac{x}{k} \right\} + \alpha \right].$$

Hier is $[u]$ het grootste gehele getal $\leq u$ en $\{u\} := u - [u]$ het fractionele deel van u. Laat zien dat voor elke $\alpha \in (0,1)$ de limiet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{S(x,\alpha)}{x}$$

bestaat. Bepaal voor zoveel mogelijk waarden van α de exacte waarde van deze limiet.

Oplossing Voor $u \in \mathbf{R}$ en $a \in \mathbf{Z}$ is $[u-a] = [u] - a$ zodat, voor $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 1$, $\alpha \in (0,1)$, na enig rekenwerk volgt dat

$$S(x,\alpha) = [x] - \sum_{1 \leq k \leq x} \left(\left[\frac{x}{k} \right] - \left[\frac{x}{k} - 1 + \alpha \right] \right).$$

We tonen vervolgens aan dat

$$S(x,\alpha) = [x] - \sum_{1 \leq k \leq x} \left(\left[\frac{x}{k} \right] - \left[\frac{x}{k+1-\alpha} \right] \right). \tag{5}$$

Om dit in te zien tellen we de roosterpunten in het open eerste kwadrant onder de continue en monotoon strikt dalende kromme $y(t) = \frac{x}{t} - 1 + \alpha$ $(1 \leq t \leq x)$, de ene keer verticaal en de andere keer horizontaal. Dit levert (men kan $x \geq 2 - \alpha$ nemen)

$$\sum_{1 \leq k \leq x} \left[\frac{x}{k} - 1 + \alpha \right] = \sum_{1 \leq k \leq x-1+\alpha} \left[\frac{x}{k+1-\alpha} \right] = \sum_{1 \leq k \leq x} \left[\frac{x}{k+1-\alpha} \right].$$

De gelijkheid in (5) volgt nu meteen. Uit deze identiteit volgt eenvoudig dat

$$\begin{aligned} f(\alpha) :&= \lim_{x \to \infty} \frac{S(x,\alpha)}{x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1-\alpha} \right) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 (u^{k-1} - u^{k-\alpha})\, du = \\ &= 1 - \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (u^{k-1} - u^{k-\alpha})\, du = 1 - \int_0^1 \frac{1-u^{1-\alpha}}{1-u}\, du. \end{aligned} \tag{6}$$

Zo geldt bijvoorbeeld $f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\pi - 3 + 2\log 2$, hetgeen we gemakkelijk berekenen door $u = v^4$ in de laatste integraal in (6) te substitueren.

Uitslag 1e editie 2001
De volledige uitslag is als volgt (de weging van de opgaven is 3 : 4 : 5):

	Naam	A	B	C	Totaal
1.	Hendrik Hubrechts e.a. (Leuven)	8	3	9	81
2.	Filip De Smet (Gent)	8	-	11	79
3.	Roelof Oosterhuis (Groningen)	8	-	3	39
4.	Meindert van der Meulen (Delft)	8	-	-	24
5.	Herbert Beltman (Twente)	7	-	-	21

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie
We vermelden alleen de top 3. Voor de complete ladderstand zie de UWC-homepage.

	Naam	Punten
1.	Filip De Smet	320
2.	Hendrik Hubrechts e.a.	272
3.	Steven Lippens	256