Herman te Riele
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
Herman.te.Riele@cwi.nl

Boekbespreking

Oom Petros en het vermoeden van Goldbach

Neefjes leren vaak schaken van oom Jan, getuige het bekende boek van Euwe en Loon. Kleinkinderen leren vaak bridgen van opa, getuige de vaste rubriek in *Bridge*, het maandblad van de Nederlandse Bridge Bond. Apostolis Doxiadis heeft de oom-neef situatie gekozen als setting voor zijn roman over een man die zijn ziel en zaligheid op het spel zet om het vermoeden van Goldbach te bewijzen. Herman te Riele, getaltheoreticus met publicaties over dit vermoeden, las dit boek.

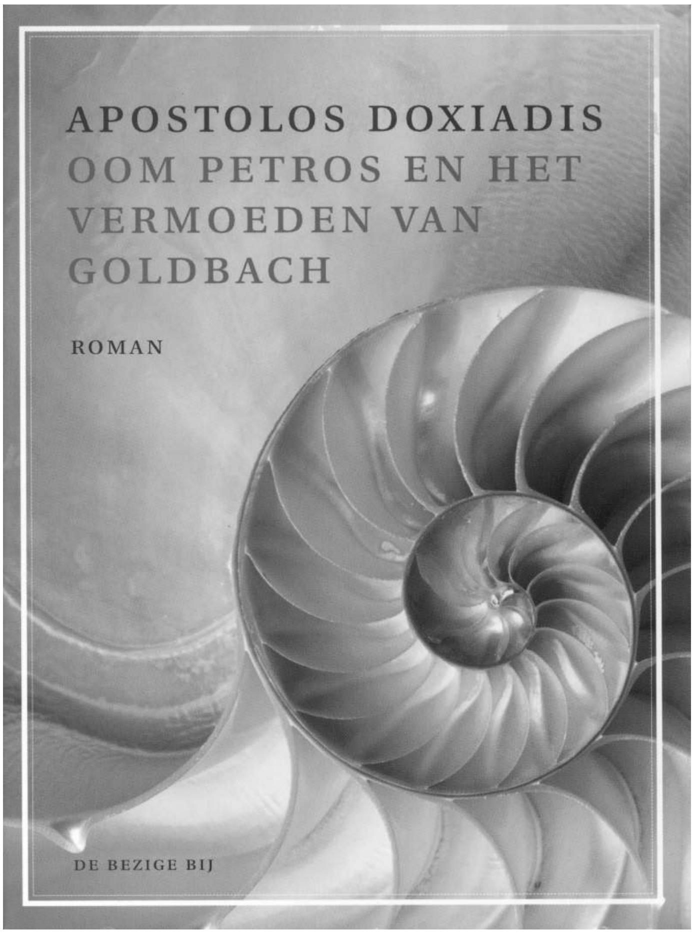
Het levensverhaal van oom Petros wordt verteld door zijn neefje, wiens naam niet wordt onthuld in dit boek. Dat suggeert dat de auteur zelf minstens enige affiniteit zou kunnen hebben met de verteller, maar waarschijnlijk ook met oom Petros. Op de achterflap van het boek lezen we immers dat de auteur “op vijftienjarige leeftijd werd toegelaten tot Columbia University in New York, nadat hij een scherpzinnig artikel had afgeleverd bij de wiskundefaculteit.”

Oom Petros is het zwarte schaap van de familie, maar dat wakkert bij het neefje alleen maar de belangstelling voor deze geheimzinnige oom aan. De twee broers van oom Petros schilderen hem bij het neefje af als een nietsnut en als ‘een van die mislukkingen van het leven’. Echter, het neefje kan tijdens de jaarlijkse naamdag-visite aan oom Petros niets van dien aard bij oom Petros ontdekken. Hij leidt weliswaar een kluizenaarsbestaan, heeft een passie voor schaken en bezit een ongelooflijke hoeveelheid wiskundeboeken, maar hij lijkt niet ongelukkig te zijn. Het neefje raakt steeds meer geboeid door oom Petros, en weet uiteindelijk diens levensverhaal van hem los te krijgen.

Eerst laat oom Petros het neefje drie maanden zwoegen op een wiskundig probleem om te zien of hij voldoende aanleg heeft om wiskundige te worden. Oom Petros laat het neefje zweren geen hulp te zoeken en geen boeken te raadplegen. Het neefje lost het probleem niet op. Als hij achteraf ontdekt dat zijn oom een van de klassieke onopgeloste vermoedens uit de wiskunde heeft opgegeven — het vermoeden van Goldbach — is hij razend. Oom Petros vond dat hij goede redenen voor zijn handelwijze had en vertelt daarom zijn levensverhaal.

Het levensverhaal van Petros Papachristos is dat van de briljante veelbelovende jonge wiskundige die zich op een van de onopgeloste klassieke wiskundige problemen stort, namelijk het vermoeden van Goldbach. Hij behaalt daarin interessante resultaten, maar bereikt niet Het Grote Doel. Hij wacht met publiceren van zijn resultaten omdat hij bang is dat anderen bij het lezen daarvan op zijn spoor zouden kunnen komen. Hij ontdekt dat iemand anders zijn resultaten ook heeft gevonden en wél gepubliceerd heeft. Vervolgens komt oom Petros in een draaikolk van steeds verwoedere pogingen terecht om Het Grote Doel te bereiken, zoals een gokker die zich al maar dieper in de schulden steekt om in één keer die grote klapper te kunnen maken.

De schrijver laat deze roman spelen in de tijd van Hilbert, Carathéodory, Hardy, Littlewood, Ramanujan, Gödel en Turing. Gödel en Turing zijn bewust als laatsten in deze rij genoemd omdat de Stelling van Gödel voor oom Petros de genadeslag betekende: het feit dat er onbewijsbare stellingen bestaan en, daaraan gekoppeld, Turings bewijs van de onmogelijkheid om a priori beslisbaarheid van een stelling te bewijzen, betekende dat oom Petros bezig zou kunnen zijn met het zoeken van het onbestaanbare, dat hij bezig was in een labyrint rond te dolen waarvan hij niet eens wist of er wel een uitgang bestond. Dit



werd hem, na al die jaren van vergeefse pogingen om het vermoeden van Goldbach te bewijzen, te veel. Het enige wat hem nog restte was het geloof dat het vermoeden van Goldbach onbewijsbaar is, gezien al zijn vruchteloze pogingen dit vermoeden te bewijzen.

Of het oom Petros lukt het vermoeden van Goldbach te bewijzen, wordt in dit boek niet duidelijk. Zelf lijkt hij te denken van wel, maar de lezer krijgt sterk de indruk dat een vlaag van verstandsverbijstering de arme man heeft bevangen als hij bij het slaken van z'n laatste ademtocht het vermoeden bewezen denkt te hebben. Moraal van het verhaal? Op bladzijde 22 zegt de vader van het neefje tegen zijn zoon: "Het Geheim van het Leven is jezelf altijd haalbare doelen te stellen." Hoe je er achter komt wat voor jou *persoonlijk* haalbaar is blijft natuurlijk het grote probleem. Zie ons lichtend voorbeeld Andrew Wiles.

Prijs van US$ 1,000,000
De Engelse uitgave van Doxiadis' boek is dit jaar bij Faber and Faber Ltd in Londen verschenen. Faber and Faber loven een prijs van US$ 1,000,000 uit voor de persoon die Goldbach's vermoeden binnen twee jaar kan bewijzen, dit 'to celebrate publication'. Dat moet dan wel een Amerikaan of Engelsman zijn. Of er iets te verdienen valt met het vinden van een *tegenvoorbeeld* dat het vermoeden zou weerleggen, is onduidelijk.

Deze roman leest als een spannend jongensboek. Zoals gebruikelijk in een roman tuimelen feiten en fictie over elkaar heen. De bekende wiskundigen Keith Conrad and Ken Ribet hebben een groot aantal fouten uit de oorspronkelijke, Griekse, editie van het boek gecorrigeerd, dus de in het boek beschreven wiskunde zit verantwoord in elkaar. Een detail: de voetnoot op bladzijde 79 zegt dat de verzameling $\{(k+2)!+2, (k+2)!+3, \ldots, (k+2)!+(k+1), (k+2)!+(k+2)\}$ k gehele getallen bevat die niet priem zijn: dit moet $k+1$ zijn.

De ontmoetingen van oom Petros met bovengenoemde wiskundigen behoren weliswaar tot het fictiegedeelte van het boek, maar ze geven toch een aardige kijk op het leven en werken van enkele grote wiskundigen uit de eerste helft van de vorige eeuw.

Van harte aanbevolen voor wiskundigen en niet-wiskundigen, en met name aan hen die zich aangetrokken voelen tot de prijs die voor het eerste bewijs van het vermoeden van Goldbach is uitgeloofd!

*Apostolos Doxiadis, **Oom Petros en het vermoeden van Goldbach**, De Bezige Bij, 2000. 198 p., prijs fl. 39,90. ISBN 90 234 3953 8.*

Het vermoeden van Goldbach
In een brief aan Euler uit 1742 poneerde Goldbach in essentie de volgende twee vermoedens:

1. (bGc) Elk even getal ≥ 6 is de som van twee priemgetallen.
2. (tGc) Elk oneven getal ≥ 9 kan voorgesteld worden als de som van drie priemgetallen.

1. staat bekend als het *(binaire) vermoeden van Goldbach*, bGc, en 2. als het *ternaire vermoeden van Goldbach*, tGc. Het is duidelijk dat tGc uit bGc volgt.
Het binaire vermoeden van Goldbach (bGc) is nog steeds onopgelost. Het is bekend dat (i) er een geheel getal s bestaat zó, dat elke even geheel getal de som is van ten hoogste s priemen [7] en (ii) dat elk voldoende groot even getal geschreven kan worden als de som van een priemgetal en het product van ten hoogste twee priemgetallen [2]. Tabel 1 geeft een overzicht van de grenzen waarvoor numerieke berekeningen aangetoond hebben dat bGc waar is. Zie [10] voor referenties.

bGc verified by	up to limit	year
N. Pipping	10^5	1940
M. K. Shen	3.3×10^7	1964
M. L. Stein, P. R. Stein	10^8	1965
A. Granville, J. v. d. Lune, H. J. J. te Riele	2×10^{10}	1989
M. Sinisalo	4×10^{11}	1993
J.-M. Deshouillers, H. J. J. te Riele, Y. Saouter	10^{14}	1998
J. Richstein	4×10^{14}	1999

Tabel 1 Grenzen waarvoor het binaire vermoeden van Goldbach aangetoond is.

Met behulp van een gedistrubueerde implementatie met minimale ruimte-eisen heeft J. Richstein het *aantal* Goldbach-partities berekend van alle even getallen tot 5×10^8 [5].

In 1937 bewees Vinogradov dat tGc waar is voor voldoende grote oneven getallen [8]. Dit werd gekwantificeerd tot $> 3^{3^{15}}$ door Borodzkin in 1956 [1], en tot 10^{43000} door Chen and Wang in 1989 [3]. Onder aanname van de veralgemeende Riemann hypothese (namelijk dat alle niet-triviale nulpunten van alle Dirichlet L-functies reëel gedeelte $1/2$ hebben), is aangetoond dat tGc waar is [4]. Saouter heeft tGc gecontroleerd voor alle oneven getallen tot aan 10^{20} [6].

Referenties
1 K.G. Borodzkin. On I.M. Vinogradov's constant. In *Proc. 3rd All-Union Math. Conf., vol. 1, Izdat. Akad. Nauk SSSR*, Moscow, 1956. (in Russian).
2 Chen Jing-Run. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Scientia Sinica*, 16(1):157–176, 1973. Reproduced in [9], pp. 253–272.
3 Chen Jing-Run and Tianze Wang. On the odd Goldbach problem. *Acta Math. Sinica*, 32:702–718, 1989.
4 J.-M. Deshouillers, G. Effinger, H. te Riele, and D. Zinoviev. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. *Electronic Research Announcements of the AMS*, 3:99–104, September 17, 1997. www.ams.org/journals/era/home-1997 .
5 Jörg Richstein. Computing the number of Goldbach partitions up to 5×10^8. In Wieb Bosma, editor, *Algorithmic Number Theory (4th International Symposium, ANTS-IV, Leiden, The Netherlands, July 2000)*, volume 1838 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 475–490, Berlin etc., 2000. Springer.
6 Yannick Saouter. Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}. *Math. Comp.*, 67(222):863–866, 1998.
7 L. Schnirelmann. Über additive Eigenschaften von Zahlen. *Math. Ann.*, 107:649–660, 1933.
8 I.N. Vinogradov. Representation of an odd number as the sum of three primes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 15:169–172, 1937. Reproduced in [9], pp. 61–64.
9 Wang Yuan. Goldbach conjecture, World Scientific, 1984. This is a collection of papers on the Goldbach conjecture with origine and progress in techniques which enable the reader to understand the major steps of the progress in this conjecture.
10 http://www.informatik.uni-giessen.de /staff/richstein/ca/Goldbach.html