Teun Koetsier
Faculteit der Exacte Wetenschappen, Divisie Wiskunde en Informatica
Vrije Universiteit Amsterdam, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam
teun@cs.vu.nl

Hilberts 24ste probleem

In 1900 hield Hilbert tijdens het 2e Internationale Congres van Wiskundigen in Parijs zijn beroemde voordracht. De gepubliceerde tekst daarvan bevat 23 problemen. Het Nieuw Archief heeft de primeur met de publicatie van de recente vondst van een 24ste probleem. Deze maakt duidelijk dat Hilberts belangstelling voor bewijstheorie in 1900 al veel verder ging dan consistentiekwesties.


Rüdiger Thiele, de ontdekker van het 24ste probleem van Hilbert

In de ochtend van de 8ste augustus 1900 hield David Hilbert, 37 jaar oud, op het 2e Internationale Congres van Wiskundigen in Parijs op uitnodiging een voordracht. Het idee voor de voordracht, het behandelen van een lijst van problemen waarmee wiskundigen zich in de komende eeuw zouden moeten bezighouden, kwam van Hilbert zelf, maar werd ondersteund door Minkowski. “Met zo’n onderwerp zou je ervoor kunnen zorgen dat de mensen tientallen jaren later nog over je lezing praten”, had Minkowski een half jaar eerder aan Hilbert geschreven. Het resultaat was ‘Wiskundige Problemen’, één van de beroemdste wiskundige voordrachten ooit gehouden. Hilbert was al een zeer gerespecteerd Duits wiskundige, maar na 1900 groeide zijn internationale faam snel. Göttingen, dat na de dood van Riemann in 1866 vervallen was tot een onbetekenend filiaal van Berlijn, ontwikkelde zich in het bijzonder dankzij Felix Klein en David Hilbert tot het Mekka van de wiskundige gemeenschap. Van heinde en ver trokken jonge getalenteerde wiskundigen naar Göttingen, ook Nederlanders: Van der Waerden, Struik en anderen.

In de lezing behandelde Hilbert 10 problemen; de gepubliceerde versie van de lezing bevatte er 23. De problemen overdekten niet de hele maar wel een belangrijk deel van de toenmalige wiskunde: analyse (5 stuks), meetkunde (4 stuks), rekenkunde en algebra (11 stuks) en grondslagen (3 stuks). Ze waren allemaal uitdagend: goed gesteld en moeilijk. Wiskundigen weten een mooi bewijs van een ander te waarderen, maar liever nog lossen ze zelf een probleem op. Bovendien lonkte hier de eeuwige roem. Een eeuw lang hebben Hilberts problemen de wiskundige gemeenschap gefascineerd en het eind is nog niet bereikt. Zie bijvoorbeeld: Felix E. Browder (Ed.), *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, AMS 1976.

David Hilbert, circa 1900

Een ontdekking

Hilberts nagelaten aantekeningen bevinden zich in Göttingen in de handschriftenafdeling van de Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek. Op 27 oktober 2000 werd op het Centrum voor Wiskunde en Informatica door de Vrije Universiteit en het Landelijk Werkcontact voor de Geschiedenis en de Maatschappelijke Functie van de Wiskunde een symposium georganiseerd. Hier vertelde de Duitse historicus van de wiskunde Rüdiger Thiele (Universiteit van Leipzig) dat hij, terwijl hij Hilberts aantekeningen met betrekking tot het 23ste probleem bestudeerde, tot zijn verbazing de volgende tekst aantrof.

“Als 24stes Problem in meinem Pariser Vortrag wollte ich die Frage stellen: Kriterien für die Einfachheit bez. Beweis der grössten Einfachheit von gewissen Beweisen führen. Ueberhaupt eine Theorie der Beweismethoden in der Mathematik entwickeln. Es kann doch bei gegebenen Voraussetzungen nur einen einfachsten Beweis geben. Ueberhaupt wenn man für einen Satz 2 Beweise hat, so muss man nicht eher ruhen, als man die beide aufeinander zurückgeführt oder genau erkannt hat welche verschiedenen Voraussetzungen (und Hülfsmittel) bei den Beweisen benutzt werden: Wenn man 2 Wege hat, so muss man nicht bloss diese Wege gehen oder neue suchen, sondern dann das ganze zwischen den beiden Wegen liegende Gebiet erforschen. Ansätze, die Einfachheit der Beweise zu beurteilen, bieten meine Untersuchungen ueber Syzygien und Syzygien zwischen Syzygien. Die Benutzung oder Kentniss einer Syzygie vereinfacht den Beweis, dass eine gewisse Identität richtig ist, erheblich. Da jeder Process des Addierens Anwendung des cummutativen Gesetzes der Addition ist. [Da] dies immer geometrischen Sätzen oder logischen Schlüssen entspricht, so kann man diese zählen und z.B. beim Beweis bestimmter Sätze in der Elementargeometrie (Pythagoras, oder ueber merkwürdige Punkte im Dreieck), sehr wohl entscheiden, welches der einfachste Beweis ist.”

Er is dus een 24ste probleem van Hilbert, een probleem dat hij wel heeft overwogen, maar tenslotte toch niet heeft opgenomen in de gepubliceerde lijst. In enigszins vrije vertaling luidt de tekst van de notitie als volgt.

“Als 24ste probleem in mijn Parijse voordracht wilde ik de vraag stellen naar criteria voor de eenvoud van bewijzen of veeleer naar het leveren van een bewijs van de grootste eenvoud van bepaalde bewijzen. Überhaupt het ontwikkelen van een theorie van de bewijsmethoden in de wiskunde. Er kan toch bij gegeven vooronderstellingen slechts één eenvoudigste bewijs zijn. In het algemeen als men voor een stelling 2 bewijzen heeft, mag men niet rusten eer men die bewijzen tot elkaar heeft gereduceerd of voldoende duidelijk is geworden welke verschillende vooronderstellingen (en hulpmiddelen) bij de bewijzen worden gebruikt: Als men 2 wegen heeft dan moet men niet alleen die wegen bewandelen of nieuwe zoeken, maar het hele tussen die wegen gelegen gebied onderzoeken. Aanzetten om de eenvoud van bewijzen te benutten geven mijn onderzoekingen over syzygieën en syzygieën tussen syzygieën. Het gebruik van of de kennis van een syzygie vereenvoudigt het bewijs dat een bepaalde identiteit correct is aanzienlijk. Omdat ieder proces van optellen toepassing van de commutatieve wet van de optelling is. Omdat hiermee altijd meetkundige stellingen of logische gevolgtrekkingen corresponderen, kan men die tellen en bijvoorbeeld bij het bewijs van bepaalde stellingen uit de elementaire meetkunde (Pythagoras, of over merkwaardige punten in de driehoek) heel goed beslissen welk bewijs het eenvoudigst is.”

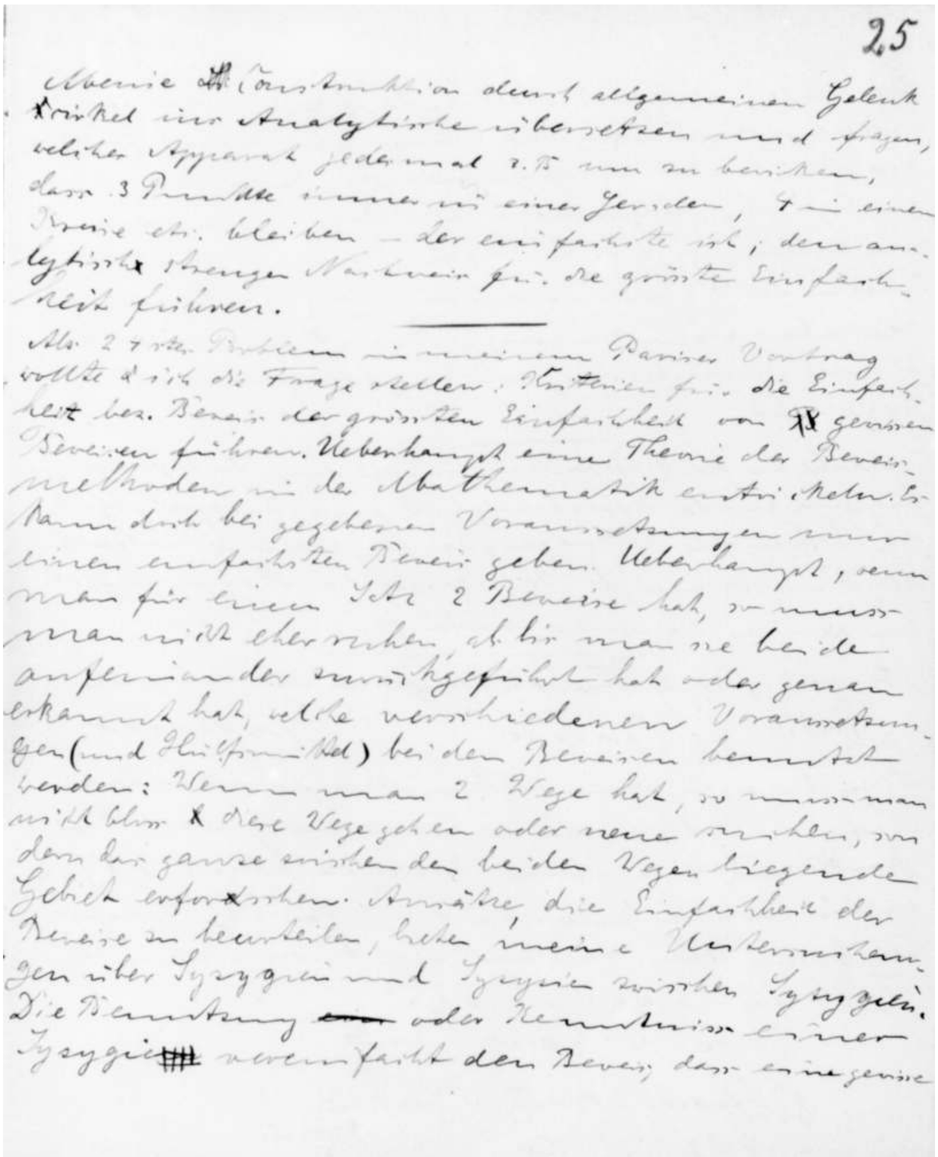
Hilberts opmerkingen over syzygieën betreffen zijn bijdragen aan invariantentheorie. Thiele merkt in zijn voordracht op het CWI daarover het volgende op. In 1888 bewees Hilbert dat de invarianten onder transformaties van een n-aire vorm van graad m een ring met een eindige basis vormen. Hilberts bewijs, dat niet constructief was, ontlokte de grote invariantentheoreticus Gordan het beroemde commentaar: “Das ist nicht Mathematik, das ist Theologie”. De elementen van zo’n eindige basis voldoen aan een relatie die men syzygie noemde. De verzameling syzygieën is gesloten onder optelling en vermenigvuldiging en vormt een ideaal dat op zijn beurt ook een eindige basis heeft, waarvan de elementen voldoen aan een 2e orde syzygie. Zo kan men verder gaan naar 3e orde syzygieën. Hilbert bewees nu ook dat men op deze manier ten hoogste m stappen kan maken (als m de graad is van de n-aire vorm, waarmee men begint). Het houdt dus op bij syzygieën van de orde m. De eerste helft van de laatste zin van Hilberts notitie is hier en daar vrijwel onleesbaar. Het is echter duidelijk dat Hilbert aan het tellen van het aantal stappen in een bewijs dacht. Thiele noemde in dit verband ook het werk van Lemoine die in 1888 alle meetkundige constructies met passer en lineaal reduceerde tot vijf basisoperaties – één daarvan is het plaatsen van de passerpunt in een gegeven punt – en de eenvoud van een constructie afmat aan het aantal benodigde basisoperaties.

Axiomatisches Denken

De vondst van Thiele is interessant omdat ze nogmaals duidelijk maakt dat Hilbert al in een vroeg stadium grote belangstelling had voor metawiskundige vragen. Het 24ste probleem is in dit opzicht verwant met het 2e probleem. Probleem 2 betreft de noodzaak van een consistentiebewijs van de axioma’s van de rekenkunde. Hilbert dacht hierbij overigens aan de theorie van de reële getallen. In zijn beschrijving van het 2e probleem stelde Hilbert dat wetenschap axiomatisch dient te worden bedreven. Dat betekent dat om de grondslagen van een theorie te onderzoeken je eerst een axiomastelsel moet opstellen dat de theorie volledig definieert. Zodra men een axiomastelsel bezit kan men allerlei vragen stellen, zegt Hilbert. Zo kan men eisen dat de axioma’s onafhankelijk zijn. De belangrijkste eis is echter de eis van consistentie. Consistentie betekent dan volgens Hilbert per definitie dat het onmogelijk is om in een eindig aantal logische stappen resultaten te verkrijgen die met elkaar in tegenspraak zijn. Het is duidelijk dat zo’n consistentiebewijs een metawiskundige theorie vereist: het is nodig om op de een of andere manier precies greep te krijgen op alle mogelijke logische stappen. In een voordracht getiteld *Axiomatisches Denken* gehouden in Zürich in 1917 kwam Hilbert terug op de kwestie. Hilberts belangrijkste werk op het gebied van de grondslagen — afgezien van *Grundlagen der Geometrie* — deed hij pas na 1918. Nadat hij Frege en Russell had geprezen voor hun belangrijke bijdragen aan de axiomatisering van de logica, stelde hij in 1917 al vast dat het probleem van consistentie nauw samenhangt met een aantal andere problemen. Hij noemde de principiële oplosbaarheid van ieder wiskundig probleem, het achteraf controleerbaar zijn van een resultaat, de vraag naar een criterium voor de eenvoud van wiskundige bewijzen, de vraag naar de verhouding van inhoud en vorm in de wiskunde en de logica en ten slotte het probleem van de beslisbaarheid in een eindig aantal stappen van een wiskundige vraag. Hilbert concentreerde zich op de laatste vraag en liet zien dat zelfs een gedeeltelijke beantwoording ervan al lastig kan zijn.

Het lijkt erop dat Hilbert in 1917 een aantal problemen formuleerde waarvan hij zich in belangrijke mate al in 1900 bewust was. Waarom Hilbert het 24e probleem uiteindelijk niet in de lijst heeft opgenomen weten we niet. Het is duidelijk dat Hilbert het 24ste probleem in 1900 belangrijk genoeg vond om het in een bepaald stadium op de lijst te zetten. Het is denkbaar dat hij het in zijn algemene formulering — geef een theorie van het bewijs in de wiskunde — in vergelijking met het 2e probleem te open of te moeilijk vond en metawiskundige kwesties van dit type voldoende vertegenwoordigd achtte door het 2e probleem.

Thiele heeft (nog) niet onderzocht of Hilbert zich na 1917 ooit expliciet heeft uitgelaten over dit 24ste probleem. In het verlengde daarvan ligt natuurlijk de vraag in hoeverre op dit moment het 24ste probleem is opgelost. Ik kan dat niet goed beoordelen, maar in de loop van de twintigste eeuw zijn in ieder geval in de complexiteitstheorie in dit opzicht ettelijke interessante technische resultaten verkregen. Specifiek met betrekking tot de lengte van bewijzen verwijs ik naar P. Pudlák, 'The Lengths of Proofs', ch. VIII in: Samuel R. Buss (Ed.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier, Amsterdam, 1998.


25

Theorie der Konstruktion durch allgemeine Gelenk Kritik ins Analytische übersetzen und fragen, welcher Apparat jedesmal z.B. nun zu beweisen, dass 3 Punkte immer in einer Geraden, 4 in einer Ebene etc. bleiben — der einfachste ist; denn analytische strenge Nachweis für die grösste Einfachheit führen.

Als 24stes Problem in meinem Pariser Vortrag wollte ich die Frage stellen: Kriterien für die Einfachheit bez. Beweis der grössten Einfachheit von gewissen Beweisen führen. Ueberhaupt eine Theorie der Beweismethoden in der Mathematik entwickeln. Es kann doch bei gegebenen Voraussetzungen nur einen einfachsten Beweis geben. Ueberhaupt, wenn man für einen Satz 2 Beweise hat, so muss man nicht eher ruhen, als bis man die beide aufeinander zurückgeführt hat oder genau erkannt hat, welche verschiedenen Voraussetzungen (und Hülfsmittel) bei den Beweisen benutzt werden: Wenn man 2 Wege hat, so muss man nicht bloss diese Wege gehen oder neue suchen, sondern dann das ganze zwischen den beiden Wegen liegende Gebiet erforschen. Ansätze, die Einfachheit der Beweise zu beurteilen, bieten meine Untersuchungen über Syzygien und Syzygien zwischen Syzygien. Die Benutzung oder Kenntniss einer Syzygie vereinfacht den Beweis, dass eine gewisse

De pagina uit Hilberts Notizbuch met zijn aantekeningen over het 24ste probleem (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen). Op ongeveer eenderde: "Als 24stes Problem ... "

Dankbetuigingen
Ik dank Rüdiger Thiele voor zijn medewerking bij het schrijven van dit stuk. De tekst van de voordracht die hij in Amsterdam hield en daaraanvoorafgaand op 9 juni in Hamilton, Ontario, zal worden gepubliceerd onder de titel 'Hilbert and his 24 problems' in: Michael Kinyon (Ed.), *History of Mathematics at the Dawn of a New Millenium, Proceedings of a Conference of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics*, McMaster University, Hamilton, Ont., 2000 (in druk). Tevens dank ik de Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek in Göttingen voor hun medewerking met betrekking tot Hilberts Notizbuch (Cod. Ms. D. Hil = 600: 3).