Universitaire Wiskunde Competitie

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 augustus 2000. Voor de ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

Opgave A

Bij een gegeven stelsel van $n+1$ vectoren $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ in $\mathbf{R}^n$, zódat $\|x_i\| = 1$ voor alle i, beschouwen we de som van de inwendige producten

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} x_i \cdot x_j.$$

a. Wat is de minimale waarde die deze som kan aannemen?
b. Geef een voorbeeld van zo'n stelsel, waarbij het minimum wordt aangenomen en de hele $\mathbf{R}^n$ wordt opgespannen.
c. Karakteriseer de stelsels, waarvoor de minimale waarde wordt aangenomen.

Opgave B

In iedere driehoek liggen hoogtepunt, zwaartepunt en middelpunt van de omgeschreven cirkel op een rechte lijn. Op deze lijn ligt ook het middelpunt van de (negenpunts)cirkel van Feuerbach, dat is de cirkel die door de midddens van de drie zijden van de driehoek gaat. Onderzoek de analoge situatie in een viervlak, bekijk ook speciaal het geval van een orthogonaal viervlak, dat is een viervlak met een hoogtepunt. Generaliseer de gevonden stelling naar een (orthogonaal) simplex in de n-dimensionale ruimte.

Opgave C

Toon aan dat voor alle $a, b, c \in \mathbf{C}$ $(a \neq 0)$, en voor alle $n, p \in \mathbf{N}$ $\left(p \neq 0\right)$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{2p} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{ax^2+bx+c}{a}\right)^k \times \\ \times \frac{d^k}{dx^k}\left[(ax^2+bx+c)^p\right] \frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}}\left[(ax^2+bx+c)^{-p}\right] = 0.$$