J. van Lint
Spiekerbrink 25
8034 RA Zwolle

Visie op wiskundeonderwijs

Wiskundeonderwijs door de jaren heen

In een serie artikelen geven wiskundeleraren en -leraressen hun persoonlijke visie op hun beroep. In deze aflevering is aan het woord Hans van Lint, van 1989 tot en met 1998 voorzitter van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Hij gaat in op de inhoud van de curricula van de afgelopen vijftig jaar.

De mate waarin docenten op universiteiten en hbo-scholen mopperen op de wiskundedocenten van het voortgezet onderwijs ten aanzien van de aangebrachte wiskundekennis en -vaardigheden is een constante functie van de tijd: $M(t) = 0 \cdot t +$ (veel).

Als je naar de leerstof kijkt die gedurende de jaren behandeld is dan is er, zeker vanaf 1968, veel veranderd. Het bestuderen van de eindexamenopgaven is buitengewoon boeiend. Het is echter bekend dat dat niet echt maatgevend is voor de aangebrachte kennis. De vele goede docenten die er altijd geweest zijn leren hun leerlingen veel meer dan het maken van de sommetjes die op het examen verwacht kunnen worden. Het is volgens mij niet eens zo belangrijk of ze extra onderwerpen behandelen, het is de manier waarop les gegeven wordt, die wiskundige vaardigheid aanbrengt. Deze uitspraak zou ik zelfs durven te extrapoleren naar de curricula die er telkens geweest zijn.

Stelling. *Wat er ook aan wiskunde wordt onderwezen, alleen de manier waarop, dus de vrouw of man die doceert en begeleidt, is bepalend of de juiste kennis, vaardigheden en attitudes worden aangebracht.*

Het bewijs dat bij deze stelling behoort kan ik niet geven, maar bij wijze van toelichting kan ik wel met behulp van een aantal voorbeelden aangeven hoe ik tegen het wiskundeonderwijs van de voorbije halve eeuw aankijk en hoe ik daarmee als wiskundedocent ben omgegaan.

Oude versus nieuwe tijd

In de moderne tijd is het zeker duidelijk dat kennis zeer veranderlijk is wat betreft de gebruikswaarde. De attitude en het vermogen om de zaak aan te pakken is wat men moet aanbrengen en niet de trucjes die helaas on-

ontbeerlijk zijn bij het oplossen van de bekende maar steeds wisselende opgaven die noodzakelijk zijn voor het behalen van diploma's. Natuurlijk is het verstandig om onderdelen van de wiskunde die toepasbaar zijn te gebruiken om de attitude aan te brengen.

Laten wij eens teruggaan naar de beginjaren van de hbs. Naast de samengestelde interest en de ingekiede sommetjes over beweging en afstand was heel belangrijk de manipulatie met wortels. We geven een voorbeeld uit het eindexamen 1884. Men kreeg toen drie uren voor twee opgaven!

Eindexamen 1884. Stelkunde, Opgave 2.
Ontbind in factoren:

$$2x^2 - 9x + x\sqrt{2} + 7.$$

Vlakke meetkunde
Gedurende tientallen jaren is in de vlakke meetkunde van de onderbouw veel gewerkt met congruenties en gelijkvormigheid van driehoeken. Bij de invoering van de mammoetwet is dit eruit gehaald en vervangen door transformatiemeetkunde. Deze heeft het niet lang uitgehouden, maar men is niet teruggekeerd naar de oude congruentiekenmerken. Hoewel het overdreven veel geoefend werd, vond ik het toch mooi gereedschap om leerlingen mee te laten zoeken naar het bewijs van allerlei eigenschappen.

Voorbeeld. Vierhoek $ABCD$ is een trapezium. AD staat loodrecht op AB. Verder geldt $BC = DC$. De lijn door C die loodrecht staat op BD snijdt BD in punt S en AB in punt E.

a. Toon aan dat $BE = BC$.
b. Als nu gegeven is dat $AE = ES$ toon dan aan dat hoek ABD gelijk is aan 30 graden.

Tevens werd in die tijd ook de vaardigheid van constructies geoefend. Van een driehoek zijn drie onafhankelijke elementen gegeven en construeer die driehoek dan maar. Eerst moest je een analyse maken met een schetsje van de driehoek. Aan de hand van die analyse moest je een plan opbouwen waarmee je dan de driehoek kon construeren met passer en lineaal. Volgens mij een mooie wiskundige bezigheid, waarbij veel problemsolvingstrategieën naar voren kwamen.

Voorbeeld. Construeer driehoek ABC als gegeven zijn hoek A en de lengten van de hoogtelijn uit C en de zwaartelijn uit B.

Hoewel je net iets meer moet weten dan de eersteklassers toen wisten zou je een tijdje later erbij hebben kunnen vragen: *als we uitgaan van de gegeven hoek A en de lengte van de hoogtelijn uit C, wat moeten we dan eisen van de lengte van de zwaartelijn uit B als er 0, 1 of 2 oplossingen voor driehoek ABC zijn?* Het onderwerp is ook in 1968 verdwenen en niet teruggekomen.

Inmiddels is de *kijkmeetkunde* gekomen met weinig mogelijkheden om het bewijzen te leren maar ongetwijfeld met iets nuttigs, vooral bij ruimtelijke oriëntatie. Men moet in het onderwijs altijd beseffen dat je zowel voor de intelligentere als voor de zwakkere leerlingen bezig bent. Ik heb grote bezwaren tegen de benaming 'kijkmeetkunde', omdat die suggereert wat we niet willen, namelijk dat conclusies getrokken worden op grond van wat je meent te zien in plaats van met een redenering die eventueel gekoppeld is aan de tekening.

Algebra, logaritmen en breuken
Bij de algebra werd het letterrekenen in de eerste jaren heel veel gedaan. Ontbinden in factoren en uitwerken van haakjes werd er ingestampt en hoewel dat erg nuttig is, blijft de vraag of de leerlingen die het op dat moment doen, begrijpen kunnen waarom ze het leren. Heel veel oefenen is nodig met de abstracte zaken en dus moest in die tijd de aardigheid gezocht worden in heel mooie antwoorden. Na wat gereken met ingewikkelde breuken vallen her en der termen tegen elkaar weg en komt er 1 of alleen x uit.

Een duidelijke verbetering kwam toen de motivatie om de vaardigheden te gaan beoefenen belangrijker werd. Toepassingen die de kinderen aanspreken, verhogen verder de motivatie en het plezier bij het werk.

Toen ik zelf eindexamen deed in 1951 en in de eerste jaren van mijn leraarschap, was het werken met de logaritmentafel belangrijk. Ook manipulaties met wortels en breuken kwamen veel aan de orde. Het is de rekenmachine die een eind bracht aan dit zeker niet onverdienstelijk gepruts. Het lijkt mij fout om net te doen of al dat werk zinloos is geweest. De technieken die nodig waren moesten begrepen worden om goed toegepast te kunnen worden. Als je die zaken aanbrengt dan kost het niemand moeite om het uit te voeren. De manier waarop je het aanbrengt moet helder zijn en begrip en inzicht bijbrengen.

Rijen en reeksen
Een belangrijk onderwerp is gedurende lange tijd ook geweest: 'rijen en reeksen'. Het bewijzen dat een rij een rekenkundige of een meetkundige rij was betekende eerst de kennis bezitten dat opvolgende termen een constant verschil of een constante verhouding hebben en daarna enig gemanipuleer met een gegeven formule. Hoewel niet vreselijk belangrijk, toch een mogelijkheid om het 'bewijzen' enigszins te oefenen.

Vaak is de manier waarop je de kennis toetst van wezenlijk belang om in te zien of het begrip aangebracht is. Een wiskundige die de lessen in een klas niet heeft bijgewoond en wel de toetsen bekijkt kan eigenlijk niet goed oordelen over de zwaarte van de toets.

Een opgave in een toets is moeilijk als de opgave zeer origineel is vergeleken bij behandelde, vergelijkbare, opgaven en men dus veel inventiviteit en creativiteit nodig heeft om een juiste oplossingsmethode te bedenken. De opgaven moeten redelijk dicht bij de behandelde leerstof liggen, maar hier en daar moeten enkele onverwachte vragen komen. Men zou bijvoorbeeld van een rij kunnen geven dat voor elke k geldt dat $S_k + T_k = 4$ en laten onderzoeken wat voor een rij het is. Als dit in de klas behandeld is, dan is men bezig met het overhoren van het geleerde trucje, maar is de opdracht nieuw, dan is inzicht en creativiteit nodig.

Differentiaalrekening
De differentiaalrekening kwam in de jaren zestig voor het eerst in de leerstof van hbs en gymnasium. Dit vereiste eigenlijk net iets teveel om goed uit te leggen. Het nut van de theorie stond buiten discussie en bij de natuurkundelessen moest het ook in de praktijk ge bracht worden. Hoewel de ε-δ-redeneringen echt te moeilijk waren, ben ik van mening dat je de achterliggende theorie met de limieten zo goed mogelijk moet proberen uit te leggen. De theorie werd niet teruggevraagd en dat was helaas een reden voor veel docenten om tijdwinst te boeken door die vluchtig te doen en meer met de toepassingen aan de gang te gaan. Daar begon men af te glijden. Het is beslist mogelijk duidelijk te maken dat de bekende breuk, waarvan de teller en de noemer allebei naderen tot nul, een limiet kan hebben.

Ook met de differentiaalrekening is het mogelijk op middelbaar niveau dingen te laten bewijzen in de toepassingen. Het alleen maar differentiëren om uiterste waarden te vinden is te weinig.

Analytische meetkunde
Analytische meetkunde is gekomen en gegaan. Een vakgebied dat zo prachtig de meet-

kunde en algebra verenigt. Dynamische problemen, waarbij dus bijvoorbeeld verzamelingen van snijpunten gevraagd worden, oplossen via vertaling van meetkunde naar algebra en na enig gemanipuleer een uitkomst terug te vertalen naar meetkunde, is mijns inziens een mooie wiskundige bezigheid.

Voorbeeld. Het punt M ligt op de x-as. De cirkel met M als middelpunt, die de y-as raakt, snijdt de lijn met vergelijking $y = 1$ in A en B. De raaklijnen in A en B aan de cirkel snijden elkaar in S. Bereken de verzameling punten S als M de x-as doorloopt.

Goniometrie en stereometrie
De goniometrie was voor velen een te grote formulewinkel. Niettemin waren er toch massa's die het best leuk vonden om allerlei vreemde identiteiten te bewijzen. Werken naar $1 = 1$ heb ik vermeden maar dat je beide leden in de gaten houdt is verstandig. Nuttig was het alleen om de formules te leren kennen en gebruiken. Het verdwijnen van die opgaven was niet verkeerd. Het werken met echte toepassingen van de goniometrie was een grote stap voorwaarts. Er kwam ook aan het licht dat je de meeste formules niet nodig had. Het opstellen van een formule aan de hand van populaties of getijden deed veel meer voor de begripsvorming dan al het gemanipuleer met de formules van vroeger.

Over de stereometrie is in de loop van de jaren heel verschillend gedacht. "je moest het zien", of kon je het toch wel beredeneren? Naast gewone berekeningen bijvoorbeeld in kubussen, pyramides, kegels of bollen kon ook daar wel eens een bewijs gevraagd worden. De slechte resultaten brachten programmamakers ertoe over te stappen op de vectormeetkunde. Een prachtige methode om heel veel van de meetkundige zaken geheel met formules op te lossen. Het gebeurde en het gevolg was dat de eenvoudigste dingen niet meer 'gezien' werden, maar met veel gereken werden berekend. Weg ermee en terug naar de ruimtemeetkunde, bij de invoering van wiskunde-B (en wiskunde-A) aan het eind van de jaren zeventig. Een mengelmoes was niet goed mogelijk kennelijk. In de tweede fase is er bijna geen ruimtemeetkunde meer over. Jammer want er is veel leuks en nuttigs mee te leren. Ik voorspel dat dit onderdeel binnen tien jaren weer terug komt.

De beschrijvende meetkunde, die tot 1958 nog heel belangrijk was op school, is volledig verdwenen. Het lijkt mij ook beter dit in een voorgezette studie, als het echt nodig is, aan te brengen.

Tweede fase
De scholen zijn nu begonnen met de tweede fase. Een nieuw wiskundeprogramma opgesteld door de Vakontwikkelgroep — met uiteraard veel van de oude onderwerpen, maar ook met vernieuwingen — moet weer door de vele docenten bestudeerd worden. Medewerkers van het Freudenthal Instituut hebben met de programma's de eerste leerlingenteksten gemaakt en de experimenteerscholen helpen begeleiden. Het meest opvallend is de terugkeer naar meer vlakke meetkunde. Nu in de bovenbouw, om de techniek van 'het bewijzen' beter aan te brengen. Met het onderwerp conflictlijnen hoopt men zowel meer moderne toepassingen te geven als redeneermogelijkheden te scheppen.

De moderne software met onder andere programma's zoals CABRI, geeft bij verstandig gebruik ongekend mooie mogelijkheden om meetkundig leuk en nuttig bezig te zijn. Om bijvoorbeeld de conflictlijn van een punt binnen een cirkel en de cirkel zelf te bepalen kom je met CABRI op het idee dat het een ellips moet zijn. Dan is het echter absoluut noodzakelijk dat er een echt bewijs komt en men niet vertrouwt op het vermoeden dat is ontstaan.

De begrippen rij, iteratie en convergentie zullen weer uitgetest worden en hoewel ik de komst toejuich, zal het succes sterk afhangen van de moeilijkheidsgraad die men aandurft.

Een belangrijk deel van de studielast is ook ingeruimd voor onderzoeksopdrachten. Op zich een hele goede zaak als er voldoende leuke, haalbare en nuttige opdrachten te vinden zijn, waarmee alle leerlingen echt zelf wiskundig aan de slag kunnen. Het moet niet een fraai uitgevoerde scriptie worden, die ergens uit overgeschreven wordt.

De bovenstaande ontboezemingen pretenderen absoluut niet een volledige historische samenvatting te zijn van het wiskundeonderwijs van de laatste vijftig jaren. Het is een subjectieve greep gemaakt door iemand die in hart en nieren het leraarsvak gedurende zevenendertig jaren heeft vervuld en die ondanks allerlei voorkomende problemen en gemaakte fouten, hoopt dat de overdracht van wiskundige kennis en vaardigheden via enthousiaste docenten zal zorgen voor een weer toenemende belangstelling voor een studie in ons mooie vak.