

R. van der Hout

Akzo Nobel Chemicals Research  
Postbus 9300, 6800 AB Arnhem  
Rein.vanderHout@akzonobel.com

## Inaugurale rede

# Wiskundige analyse in

**Op 21 januari 2000 sprak Rein van der Hout zijn oratie uit bij de aanvaarding van het ambt hoogleraar in de Wiskunde aan de Universiteit Leiden. Hier volgt het inhoudelijke gedeelte van zijn oratie.**

Een onderzoeker, werkzaam in het bedrijfsleven, moet twee heren dienen. De eerste heer is het bedrijf, dat een positief financieel resultaat van het onderzoek wil zien; de tweede is de wetenschappelijke nieuwsgierigheid, die stimuleert tot het bestuderen van interessante problemen. Het is niet op voorhand duidelijk dat hier een tegenstelling van belangen speelt: een bedrijf stelt een onderzoeker aan om diens kennis en nieuwsgierigheid te gebruiken, terwijl een onderzoeker zo'n aanstelling accepteert omdat hij aansprekende problemen verwacht. Dat lijkt voor de hand te liggen, maar de werkelijkheid leert anders.

In het verleden heerste de opvatting dat onderzoek, mits juist gericht en goed uitge-

voerd, min of meer vanzelf zou leiden tot nieuwe processen, of producten met een groot marktpotentieel. In de laatste tien tot vijftien jaar is dit gezichtspunt sterk veranderd. De achtergrond daarvan is niet eenvoudig te begrijpen. Een volledig falen van onderzoek kan hier moeilijk als argument gebruikt worden; veel producten en productiemiddelen berusten immers op onderzoek en veel uit productieprocessen behaalde winsten zijn dus op onderzoeksresultaten uit het verleden terug te voeren.

Natuurlijk is blind vertrouwen in onderzoek niet gerechtvaardigd. Maar de huidige trend om er slechts een kostenpost in te zien is dat evenmin. Hoe deze kostenpost-gedachte tot stand komt, lijkt duidelijk: het is precies bekend hoeveel een onderzoeksinspanning gekost heeft, maar het ontbreekt aan goede criteria om de opbrengst te meten. Zo hoeft een goed onderzoeksresultaat niet noodzakelijk *direct* te leiden tot een grotere financiële influx voor het bedrijf. Evenzeer

kan zo'n resultaat leiden tot het voorkómen van overbodige uitgaven; en het is onmogelijk om te schatten hoeveel geld bespaard wordt als weinig kansrijke wegen vermeden worden. Ook kan onderzoek leiden tot een goed product, dat op grond van strategische overwegingen niet op de markt wordt gebracht. Wie is dan verantwoordelijk voor de kosten? En wat te zeggen van verbeterd begrip? Hoe druk je zulke zaken in geld uit? En op welke tijdschaal moet de opbrengst gemeten worden?

De vraag naar opbrengst en de gekoppelde vraag naar de wijze van financiering hebben hun antwoord gevonden in een steeds meer in projectstappen georganiseerd onderzoek, waardoor de resultaten beter van tevoren te schatten zijn en waardoor de financiële structuur beter zichtbaar is geworden. De vraag naar de tijdschalen is volledig uit de beschouwingen verdwenen: de tijdschaal wordt eenvoudig in de projectbeschrijving vastgelegd. Het behoeft geen betoog dat lange termijn onderzoek zeer van deze filosofie te lijden heeft,



Rein van der Hout

# de chemische industrie

evenals onderzoek dat vooral op begripsvorming is gericht. Uit bestuurlijk oogpunt heeft zo'n opzet voordelen, maar de genoemde nadelen mogen niet uit het oog verloren worden. De projectmatige structuur van het onderzoek sluit per definitie alle verrassingen uit, en daarmee is die structuur een rem op doorbraken. Hiermee *lijkt* de eerste heer van daarnet veel meer gediend dan de tweede: de opbrengst wordt veel zekerder, zij het ook veel beperkter; de wetenschappelijke nieuwsgierigheid krijgt geen kans meer. Maar of de eerste heer hier blij mee moet zijn? Die nieuwsgierigheid zou toch juist de basis van het onderzoek moeten zijn? Kortom: dubbel herenleed. Verstaat u mij goed: ik pleit er niet voor om onderzoek volledig vrij te laten; veel zaken zijn uitstekend te plannen en het is goed om dat ook te doen. Maar dit impliceert niet dat onderzoek *altijd* in precieze projectstappen gepland kan worden. Het ontwikkelen van nieuwe concepten en het oplossen van moeilijke problemen vragen creativiteit. Voor

planners is hier geen plaats. Bedrijven die in zulke zaken geïnteresseerd zijn, moeten vertrouwen hebben in de kunde en de loyaliteit van hun onderzoekers. Het is niet moeilijk om onderzoek dood te organiseren.

## Industriegericht onderzoek

Laten wij ons afvragen of industrieel onderzoek nog wel nodig is. Daarmee samenhangend heb je de vraag hoe belangrijk de industrie in de toekomst voor ons zal zijn. Helemaal duidelijk is mij dat niet. Wat mij wèl duidelijk is, is dat *kennis* en *technologie* de basis zullen zijn voor onze toekomstige welvaart. Als de industrie een belangrijke factor blijft in ons bestaan, zal dat zijn op grond van technologie-intensieve en milieu-vriendelijke producten. Daarvoor is onderzoek nodig. Mocht de industrie een minder grote rol krijgen, dan zal kennis op zich een handelsobject moeten worden, willen wij het hoofd boven water kunnen houden. Ook dan is onderzoek nodig. Hoe de toekomst er uit zal zien, weet ik niet, maar

op dit moment is het zeker niet gerechtvaardigd om industrie-gericht onderzoek als achterhaald te beschouwen. Ten onrechte wordt soms gedacht dat zulk onderzoek vrijwel volledig bij universitaire instellingen uitbesteed kan worden. Ik zal de laatste zijn om te ontkennen dat samenwerking met universiteiten zinvol is. Maar voor een vruchtbare samenwerking heb je aan beide zijden onderzoekservaring nodig: iemand zonder onderzoekservaring is nauwelijks in staat een onderzoeksopdracht te formuleren, of de resultaten van onderzoek te interpreteren.

Vanuit de universiteit gezien kan onderzoek in opdracht van de industrie zeer zinvol zijn, niet alleen in financieel opzicht. Een academisch onderzoeker heeft de taak om wetenschappelijk verantwoord onderzoek te doen aan onderwerpen die aan zijn wetenschappelijke nieuwsgierigheid appelleren — ik spreek nu zeer nadrukkelijk over goede onderzoekers, die hun sporen verdiend hebben. Zulke onderwerpen zijn er, mijns inziens, te

over in de industrie. Ik geef overigens toe dat mijn nieuwsgierigheid niet noodzakelijk met die van anderen overeenstemt.

Wil een industriële onderzoeksinstelling zijn voordeel doen met kennis uit de Academia, dan moet zo'n instelling zorg dragen voor de aanwezigheid van voldoende onderzoekers die geschikt zijn voor een intermediaire functie. Die geschiktheid betreft zowel goede onderzoekskwaliteiten als enthousiasme voor wat in het eigen bedrijf gebeurt. Dat laatste kan binnen het bedrijf gemakkelijk vastgesteld worden; onderzoekskwaliteiten daarentegen zijn mijns inziens alleen vast te stellen via confrontatie met de wetenschappelijke wereld. Daarom, en om een bijkomende reden die ik weldra zal noemen, zou een industrieel onderzoeksinstituut een — misschien voorzichtig, maar wel positief — stimuleringsbeleid ten aanzien van publicaties in gerefereerde vaktijdschriften moeten voeren. Ik beseft dat het voorbereiden van publicaties tijd, en dus geld, kost. Maar daar staan twee zeer grote voordelen tegenover: in de eerste plaats verkrijgt men inzicht in de kwaliteit van het eigen onderzoek; in de tweede plaats is het voor academische onderzoekers zeer aantrekkelijk om samen te werken met iemand uit de industrie die geen tijd heeft (of zelfs een verbod) om aan publicaties te werken. Een academisch onderzoeker wordt nu eenmaal op zijn publicaties afgerekend; en dat is terecht. Deze barrière bestaat niet als bedrijven een positieve houding ten aanzien van publicaties aannemen. Beide voordelen samen vertegenwoordigen een grote waarde.

Zelf heb ik mij steeds gerealiseerd dat het schrijven van publicaties niet een primair bedrijfsbelang is, maar toch heb ik altijd positieve reacties gehad op voorgenomen publicaties. Daarin kan het wiskundige karakter van mijn werk meegespeeld hebben: erg veel gevaar voor het verraden van geheimen is er niet, en octrooien zijn voor wiskundige resultaten niet te verwachten, in ieder geval niet in de richting waarin ik onderzoek doe.

### Wiskundigen in de industrie

Na deze algemene beschouwingen wil ik ingaan op *wiskundig* onderzoek binnen de *chemische* industrie en meer in het bijzonder onderzoek op het gebied van analyse. De vraag of zulk onderzoek zinvol is voor de bedrijfstak en voor de wiskunde kan met een kort 'ja' beantwoord worden. Er zijn ruimschoots voldoende onderwerpen die zowel voor de chemische industrie als voor de wiskunde van belang zijn. Maar daarmee zijn wij er niet: die onderwerpen komen vaak zeer moeizaam, of he-

lemaal niet, binnen het blikveld van een wiskundige. En als het al zover komt, is er vaak geen geld om het wiskundige werk te betalen. Dat is een probleem dat, gezien de toegevoegde waarde van de wiskunde en de lage kosten die ermee gemoeid zijn, niet zou mogen bestaan. Waarom bestaat het dan? Misschien speelt de volgende overweging een rol. Ik heb gemerkt, dat in het bedrijf waar ik werk — en niet alleen daar — de wiskunde pas aangesproken wordt als alle andere mogelijkheden gefaald hebben. Eerst wordt een ingenieur ingeschakeld, dan een chemicus, vervolgens een fysicus. Als het dan nog niet gelukt is, zoekt men een informaticus, of tenminste iemand die een getal of grafiek uit een computer weet te halen. Pas daarna (en als alles mislukt is) herinnert men zich de wiskundige: een nerd, die veel vervelende vragen stelt en belachelijk precies is. Maar meestal komt het niet zover: de eerder geschetste projectmatige aanpak blokkeert de zojuist geschetste weg vaak nog vóór zijn natuurlijke einde. Tot schade van het bedrijf en het onderzoek, naar mijn overtuiging. Een vroegtijdige inzet van wiskunde leidt vaak betrekkelijk snel tot begripsverhoging, waardoor de zoekrichting duidelijker wordt.

Ik weet niet goed, hoe je deze voor alle partijen zorgwekkende ontwikkeling kunt stuiten. Het zou goed zijn om de wiskunde organisatorisch zichtbaar en toegankelijk te maken. Helaas is de praktijk anders: waar enige jaren geleden afdelingen toegepaste wiskunde bestonden, zijn de wiskundigen nu diffuus door de bedrijven verspreid. Dit is een gevolg van de slechte zichtbaarheid van de wiskunde en het komt die zichtbaarheid bepaald niet ten goede. Een vicieuze cirkel, vrees ik. Een goede presentatie van de wiskunde uit is een nodige, maar absoluut onvoldoende, voorwaarde om dit ten goede te keren.

Genoeg somber gepraat! Laat mij u iets vertellen over het soort onderzoek dat op je af komt als je toch een goed onderwerp te pakken hebt gekregen. Zulk onderzoek is de basis van de vervulling van mijn nieuwe functie; ook mijn onderwijs staat in het teken daarvan. Bij bijna ieder onderwerp kom ik vroeg of laat op differentiaalvergelijkingen uit; dat zijn vergelijkingen die min of meer glad verloopende processen en situaties beschrijven. Het bestuderen van zulke vergelijkingen gaat vaak met rekenwerk gepaard, maar dat beschouw ik zelf niet als de kern van het werk. Het gaat om andere zaken dan bij simulatie, het groot-schalige rekenwerk waarmee toegepaste wiskunde vaak wordt geïdentificeerd. Simulatie is: het door berekeningen trachten het gedrag

van complexe systemen na te bootsen. De rekentechnische basis is meestal een groot softwarepakket, bijvoorbeeld op het gebied van stromingsleer of processimulatie. Ik ben geen tegenstander van simulatie; integendeel, deze benadering levert belangrijke bijdragen in een industriële omgeving. Toch wijs ik met klem op het volgende: simulatie is een vorm van experimenteren. Het is echter lang niet altijd duidelijk welke 'proef' je aan het doen bent: test je het proces? Of het model? Of het computerprogramma? Of de computer zelf? Zelfs als je er zeker van bent dat je het goede probleem onderzoekt, kun je nog voor interpretatieproblemen komen. Wat bijvoorbeeld te denken van een probleem dat meerdere oplossingen heeft?

Als voorbeeld noem ik het 'probleem van Taylor': neem twee heel lange coaxiale cilindres, waarvan de binnenste draait, terwijl de buitenste stilstaat, met een visceuze vloeistof daartussen. De vloeistof kleeft aan beide wanden. Na verloop van tijd stelt zich een stromingsprofiel in, waarvan wij rustig kunnen aannemen dat het niet meer verandert. Hoe ziet dat profiel er uit? Als de snelheid van de draaiende cilinder voldoende groot is, heeft het voor de hand liggende wiskundige modelprobleem tenminste twee oplossingen. Welke vind je bij simulatie? Is dat een fysisch acceptabele oplossing? Als je alleen simuleert, onderken je het probleem niet eens. Wil je het wèl onderkennen, dan zit er maar één ding op: *doe wiskunde!*

Het zal u niet verbazen dat ik aarzel om 'simulatie' onder de toegepaste wiskunde te rekenen. Overigens beseft ik dat je vaak weinig anders kunt doen dan simuleren en soms moet je de onzekerheid maar op de koop toe nemen. Maar ik heb al gesuggereerd dat het niet mijn aanpak is. Ik voel mij meer thuis bij de volgende werkwijze.

- Allereerst het maken van modellen voor verschijnselen, dat wil zeggen het opstellen van vergelijkingen, waarvan je hoopt dat de oplossingen de verschijnselen redelijk beschrijven.
- Vervolgens de analyse van die vergelijkingen, dat wil zeggen het onderzoek of er een oplossing is, of die uniek is, of hij continu afhangt van de gegevens en hoe hij er "ongeveer" uitziet.
- Dan rekenwerk om de oplossing precies te bepalen, als dat nog nodig is.
- Simultaan met dit alles de interpretatie: wat betekent dit voor het oorspronkelijke probleem?

Natuurlijk speelt zoiets ook mee in de simulatiepraktijk, maar daar is het heel ver naar

de achtergrond geschoven. De uiterst belangrijke analyse-stap komt er nauwelijks aan de orde, terwijl juist die stap sterk begripsverhogend werkt. En begrip heb je nodig als je processen wilt beïnvloeden.

Gelukkig zijn veel problemen geschikt voor analytische overwegingen en vaak hebben de directe praktische vragen veel raakpunten met de vragen die een wiskundige zou stellen zonder enige kennis van het achterliggende technische probleem. Laat mij een voorbeeld noemen: verftechnici, die de stroming van een niet perfect gladde laag natte verf langs een hellend vlak bestuderen, zijn vaak geïnteresseerd in vaste dikteprofielen, die met vaste snelheid naar beneden bewegen; wiskundigen vragen zich bij de bijbehorende vergelijkingen af of er een “lopende golf oplossing” is en, zo ja, hoe hij er uitziet. U raadt het al: het gaat om dezelfde dingen.

Ik wil er de nadruk op leggen dat het maken van bewijzen een essentieel onderdeel van de analytische aanpak is. Het zoeken naar een existentie-bewijs geeft vaak een verrassende kijk op de structuur van een oplossing. Daarmee krijg je inzicht in allerlei afhankelijkheden. Vaak is dat al voldoende om een vraag te beantwoorden. Later kom ik in een voorbeeld hierop terug.

### Bewijzen

Een opmerking terzijde. Het *onderwijzen* van bewijskunst kan niet vroeg genoeg starten. Bewijzen dienen niet alleen om duidelijk te maken dat iets echt waar is, hoe belangrijk dat ook is, maar vooral om de structuur van een probleem en zijn oplossing te doorgronden.

In *toepassingen* kun je er pas na dat doorgronden redelijk zeker van zijn dat model en werkelijkheid iets met elkaar te maken hebben. Als *vwo leerlingen* het bewijs begrijpen dat  $\sqrt{2}$  een irrationaal getal is, kan dat een aanzet zijn tot inzicht dat de getallenlijn een andere structuur heeft dan zij misschien verwacht hebben.

Ik vind dan ook dat de bewijskunst zeer nadrukkelijk in het wiskunde-pakket van het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs aan de orde moet komen. ‘Intuïtie’ kan dit niet vervangen; integendeel, een bewijs is juist een middel om de intuïtie concreet te maken. Bovendien is ‘bewijzen maken’ spannend; wiskunde zonder bewijzen is een lege huls. Zulke wiskunde wordt terecht saai gevonden; en saai wiskunde leidt niet tot grote studentenaantallen.

Die kleine studentenaantallen beginnen bedreigende implicaties te krijgen. Telkens wordt gesuggereerd om vakgroepen of faculte-

teiten te sluiten, met als achterliggende gedachte dat het opleiden van studenten de enige bestaansreden van zo’n vakgroep of faculteit is. Met nadruk zeg ik hier dat de wiskunde een essentieel onderdeel van onze cultuur is; een onderdeel bovendien, zonder welk onze wereld er totaal anders uit zou zien. Het in stand houden daarvan is van het grootste belang voor de toekomst van onze samenleving en dat mag niet door dalende studentenaantallen in gevaar worden gebracht. Wat wij daar zelf aan kunnen doen, weet ik niet precies. Wij kunnen trachten onze toepassingen te richten op gebieden die minder traditioneel wiskundig georiënteerd zijn; maar dat gebeurt al lang. Het is vechten tegen een slecht imago en dat is een moeilijke opgave. Kinderen, die gepest worden, worden dat niet omdat zij slecht zijn, maar omdat iets in hun imago (bijvoorbeeld het schoenmerk) niet strookt met wat gangbaar geacht wordt. Van iets dergelijks heeft de wiskunde, en meer in het algemeen alles wat exact is, ook last. Exact lijkt te impliceren: saai, asociaal en moeilijk. Dit is weerlegbaar, afgezien misschien van de moeilijkheid. En wat die moeilijkheid betreft: voetballen is ook moeilijk en dat mag zich in een redelijke populariteit verheugen. Het werken in een exact gebied is zó interessant, dat je er volledig in op kunt gaan. Dat is heel duidelijk voor buitenstaanders herkenbaar; waar het saai beeld vandaan komt, is een raadsel! Ben je asociaal als je ergens volledig in opgaat? Geenszins, zou ik zeggen: veel van mijn vrienden heb ik verkregen door samen met hen heel diep in een probleem te duiken. Zo’n samenwerking heeft veel gemeen met gezamenlijke muziekbeoefening, wat toch zeker geen asociale bezigheid is. Deze argumentatie heeft overigens even weinig effect als het kopen van nieuwe schoenen als je gepest wordt: het wordt voor kennisgeving aangenomen.

### Vloeibare kristallen

Ik wil nu terugkeren naar wat ik zei over bewijzen in de industrie en ik wil één en ander met een voorbeeld illustreren. Het voorbeeld is generiek in de zin dat het een volledig beeld geeft van de weg, die je als analyticus in de industrie moet gaan om een probleem op te lossen en ik stel het op prijs u een beeld van die weg te schetsen. Hiermee verweven wil ik u iets vertellen over mijn ontwikkeling als toegepast wiskundige bij Akzo Nobel.

In mijn omgeving hebben vloeibare kristallen tot voor kort een belangrijke rol gespeeld. Er worden kunstvezels van gemaakt en polarise-

rende films. Voordat ik iets met zulke materialen te maken kreeg, was het begrip ‘vloeibaar kristal’ een raadselachtig iets voor mij. Als je eenmaal weet waar het om gaat, zie je een heel rijke, maar niet zo makkelijk te doorgronden wereld open gaan. Wat is een vloeibaar kristal nu eigenlijk? Ik zal mij beperken tot wat men noemt *nematische* vloeibare kristallen. Het woord nematisch is afkomstig van de fysicus G.Friedel. Het is afgeleid van het Griekse *νημα*, dat ‘draad’ betekent. ‘Nematisch’ betekent dus ‘draadachtig’. Een nematisch vloeibaar kristal is, grofweg, een vloeistof met lokaal een voorkeursrichting. Denkt u voor het gemak aan water, waarin zich lucifershoutjes bevinden met hetzelfde soortelijk gewicht als water: de houtjes drijven niet óp, maar in het water. Bij dit beeld wil ik vier kanttekeningen plaatsen. Allereerst moet u zich voorstellen dat bij *ieder punt* in de vloeistof zo’n houtje hoort. In de tweede plaats zijn kop en staart equivalent of, anders gezegd, de lucifers hebben geen kop. Verder speelt de lengte van de houtjes geen rol, alleen de richting telt. Tenslotte: de houtjes hebben een zekere interactie; zij voelen elkaars aanwezigheid, als waren zij door veertjes verbonden. Zo’n houtje voelt zich op zijn gemak als alle houtjes in zijn omgeving dezelfde richting hebben als hij zelf. Een microscopisch kudde-instinct, dus.

Laat mij iets preciezer worden. Een nematisch vloeibaar kristal is een vloeistof met een richtingsveld, waarvan omkering de vloeistofeigenschappen invariant laat (voor de wiskundigen onder u: zo’n richtingsveld is equivalent met een afbeelding naar het projectieve vlak; voor de niet-wiskundigen: kop en staart zijn gelijkwaardig en de lengte doet er niet toe). Met dat richtingsveld is een energiedichtheid verbonden (het kudde-instinct). Ter verduidelijking: een energie-dichtheid is een energie per volume-eenheid. De energiedichtheid op een zekere plaats is nul als de stokjes er evenwijdig zijn en positief als er variaties in richting optreden.

Een fysische interpretatie: denkt u bij die stokjes aan keten-moleculen. De ketens beïnvloeden elkaars stand in de ruimte, dat kunt u wel aanvoelen. Die beïnvloeding betekent dat er sprake is van een *energiehuishouding*; daarmee zijn wij in de mechanica beland. Dat is prettig, want in de mechanica is de wiskunde buitengewoon effectief.

Zoals eerder gezegd, worden vloeibare kristallen gebruikt als grondstof voor, onder meer, kunstvezels. U kunt zich bij een vezel voorstellen dat de draagkracht groter is, naarmate

de moleculen meer in de lengterichting van de vezel georiënteerd zijn. Hoe krijg je dat voor elkaar? Ik ga weer even met u terug naar de lucifershotjes in water, of, om een ander beeld te hanteren, boomstammen in een rivier. De richting van de stammen wordt, vanzelfsprekend, beïnvloed door de stroming (en omgekeerd!). Ook beïnvloeden de stammen elkaar, omdat zij steeds tegen elkaar botsen (in onze analogie eigenlijk door veren). Verder speelt de oever een rol: daar zijn de stammen niet vrij om hun richting te kiezen. Als wij iets over de richtingsverdeling willen zeggen zijn er dus drie aspecten:

- interactie van de stammen onderling,
- interactie met de oever,
- interactie met het water.

Als wij denken aan heel veel stammen in een stilstaand meer, hebben wij nog steeds met onderlinge interactie en "randvoorwaarden" langs de oever te maken. Maar stroming is er niet. Voor fysici en wiskundigen is de aanpak nu duidelijk: de totale energie moet geminimaliseerd worden, onder de randvoorwaarden die de oever oplegt. Een minimaliseringsprobleem dus, dat typisch thuis hoort in de variatierekening. Anders van aard is het probleem met stroming: nu doen ook visceuze beschouwingen hun intree; er kan door wrijving warmte worden geproduceerd en het lijkt in eerste instantie niet voor de hand te liggen dat variationele middelen hier veel kunnen helpen.

Het probleem "Hoe kun je de stand van moleculen in een stromingsveld sturen?" heb ik voor het eerst ontmoet in het begin van de tachtiger jaren. Aanleiding waren vragen van mijn collega, de fysicus Northolt. Het probleem werd ons destijds niet aangereikt in de vorm die ik u zojuist geschetst heb. U verwacht nu misschien dat ik ga zeggen: 'Na enig proberen hebben wij een model gemaakt volgens de genoemde ideeën en na wat rekenen was het probleem opgelost.' Niets is minder waar. Wij hebben geworsteld met het probleem en wij zijn geen stap verder gekomen. Na verloop van tijd hebben wij het probleem laten rusten.

De eerste, voor mij bevredigende, aanraking met toegepaste wiskunde heb ik aan dezelfde Northolt te danken. Er moest een meetserie 'gedeconvolueerd' worden: signalen, die via een meetapparaat verkregen waren, moesten ontdaan worden van de effecten die het meetapparaat zelf had toegevoegd. U kunt denken aan een stralingsmeter die niet voor alle golflengten even gevoelig is. Hoe kun je het sa-

mengestelde signaal ontleden? Dat was een nieuw probleem voor mij en het heeft mij aan het denken gezet. Het is een *slecht gesteld* probleem: heel kleine variaties in de gegevens kunnen willekeurig grote afwijkingen in de oplossing geven; de oplossing hangt niet continu van de gegevens af. 'Slecht gesteld' wil niet zeggen, dat de opsteller zijn werk slecht heeft gedaan; het betekent dat het zoeken naar een oplossing onbegonnen werk is, als je geen a priori kennis hebt over het karakter ervan. Northolt was toen niet erg blij, meen ik mij nog te herinneren, maar dit is wel de aanzet geweest tot een gezamenlijke studie over vezelfysica. Maurits, in die periode heb je mij de ogen geopend voor de zin van toepassing van de wiskunde bij het vormen van begrip voor wat je ziet gebeuren.

Ik ben destijds met een zuiver wiskundige achtergrond bij Akzo binnengekomen en de omschakeling naar toegepaste wiskunde was een schok voor mij. Niet zozeer door de andere vraagstellingen, maar vooral door het feit dat numerieke resultaten zonder meer als oplossingen van problemen werden geaccepteerd. Ik begreep zeer goed dat dat niet anders kon, maar het gaf mij geen mooi gevoel. Al snel voelde ik de wens om te kijken hoe toegepaste wiskundigen op universiteiten tegenover zulke vragen staan. Dat is de eerste aanzet geweest tot contacten met onder andere de groep rond Segal in Delft, met het toenmalige Mathematisch Centrum en met de groep van professor Spijker in Leiden.

Inmiddels was bij Akzo de fysicus Picken in dienst getreden, die veel onderzoek aan vloeibare kristallen heeft uitgevoerd en dat nog steeds doet. Hij is overigens kort geleden in Delft tot hoogleraar benoemd. Hij vroeg mij destijds om mij een beetje in de achterliggende wiskunde te verdiepen en hij gaf mij een dictaat van een cursus die door professor Leslie in Eindhoven was gegeven. Leslie is één van de grondleggers van de stromingsleer van vloeibare kristallen.

Uit dat dictaat kwamen twee aspecten duidelijk naar voren: de statica (dat is de leer van de rustsituatie) wordt goed beschreven via een energie-minimaliseringsbeginsel, terwijl voor de dynamica allerlei verschillende wrijvingsparameters (ook viscositeiten genoemd) nodig zijn, die onder anderen te maken hebben met het ronddraaien van het richtingsveld (dat wil zeggen: de stokjes; of misschien is het hier handiger om aan poolloze kompasnaaldjes te denken).

Een punt dat in Leslie's dictaat niet goed

uit de verf leek te komen is het volgende. Hij begon met statische beschouwingen, gebaseerd op minimalisering van energie; maar zodra de dynamica ter sprake kwam, liet hij de energie-beschouwingen weg. Later heb ik begrepen wat daar de reden voor was: die energie is buitengewoon klein. Maar uit wat nu volgt zal u duidelijk worden dat deze stap niet altijd gerechtvaardigd is.

Toen ik dacht enigszins te begrijpen hoe je wiskunde aan vloeibare kristallen kunt bedrijven, besloot ik tot een oefening: ik legde mijzelf de vraag voor hoe een nematisch vloeibaar kristal zich gedraagt bij stroming door een cylinder. Daarbij keek ik speciaal naar een heel lange cylinder en wel op een plaats die heel ver van instroom- en uitstroombepijping verwijderd is. Dan hoeft je effecten van instroom en uitstroom niet mee te nemen. De eerste stap was, in navolging van Leslie, het weglaten van de energiebeschouwing. Na wat rekenen kreeg ik een heel plausibel antwoord. Maar bij goed kijken was er een probleem: als je, in de nu berekende situatie, de energie toch zou uitrekenen, zou die, vanwege wringing bij de as, oneindig groot zijn. *Dus zeker niet verwaarloosbaar!* Dat is natuurlijk redeneren achteraf. Eerst gooi je de energie weg en dan kom je met een oplossing waarvan de enige waarde is dat hij laat zien dat je de energie niet mag weggooiën. Wat dan te doen? Ik heb mij toen allereerst afgevraagd of het zoeken naar een oplossing gerechtvaardigd was. Wel, die vraag was niet zo moeilijk te beantwoorden. Een spingat lijkt veel op een cylinder en één van de redenen om naar vloeibare kristallen te kijken was juist om een beter begrip voor het spinproces te krijgen. Het opstellen van een model (vergelijkingen, dus) was niet echt moeilijk. Maar anders was het met de analyse en het oplossen ervan. Bij sommige randvoorwaarden (denk aan de boomstammen en de oever) kon ik geen oplossing vinden. Dat dat met potlood en papier niet lukte is niet zo vreemd (maar wel heel vervelend); dat het numeriek ook niet ging vond ik zorgwekkend. Ik dacht dat er iets fout was, maar ik kon geen fout vinden. Ik heb toen, zonder al te veel hoop, gekeken of het probleem als een variationeel probleem gezien kan worden. Zonder veel hoop, omdat visceuze aspecten een rol spelen, waarbij variationele methoden meestal niet werken. (Ter herinnering: variationeel wil zeggen: via het zoeken naar een minimum of, algemener, een zadelpunt.)

Toch kon er een variationele formulering gevonden worden. De te minimaliseren grootte is echter geen potentiële energie, zoals

meestal; de energie die je nodig hebt om van een situatie I in een situatie II te komen hangt af van de gekozen weg. Het probleem leek dus een minimaliseringprobleem te zijn. Je moet je dan altijd afvragen: waarover minimaliseer ik eigenlijk? Het heeft bijvoorbeeld weinig zin om naar de kleinste diamant te zoeken. Afgezien van de krenterigheid daarvan, is zo'n zoektocht vergeefs: als u hem denkt gevonden te hebben, zal ik hem voor u splijten en dan heb ik een nog kleinere. Bij de vloeibare kristallen is een voor de hand liggende collectie om over te minimaliseren: de verzameling van alle richtingsvelden, waarvan de energie eindig is. Het bepalen van die verzameling liet een probleem zien, dat direct samenhangt met het aanvankelijk falen van de oplossings-technieken.

Ik moet nu een beetje technisch worden, maar ik zal dat heel kort houden. Het gaat om een niet lineair probleem en de verzameling richtingsvelden met eindige energie is geen lineaire ruimte, maar een discrete collectie verschoven kopieën van een lineaire ruimte. U kunt daarbij denken aan een stel evenwijdige vlakken in de driedimensionale ruimte. Bij een verandering van randvoorwaarden stapt de oplossing soms over op een andere kopie. Wiskundig uitgedrukt: de oplossingen bij verschillende randvoorwaarden zijn niet noodzakelijk homotoop.

Ik zal nu trachten te schetsen wat er fysisch of, zo u wilt, meetkundig, gebeurt. Stelt u zich een rijtje verticale lucifershoutjes voor, naast elkaar, waarbij het meest linkse houtje op de as van de cylinder gedacht wordt en het meest rechtse op de wand van de cylinder. Verdraai nu dat rechtse houtje zo, dat het in één vlak blijft met de rest, en laat die rest continu meebewegen. Dat alles zodanig, dat het linkse houtje vast blijft. Ga door tot het rechtse houtje ondersteboven staat. U hebt dan een slag in het systeem gestopt. Schuif nu het geheel samen, zodat alle houtjes bovenop het linkse houtje, dus op de as, komen te liggen, maar ieder met zijn eigen stand. U moet zich voor ogen blijven houden dat alléén de *richting* van de houtjes een rol speelt. De open gevallen ruimte vult u weer op met verticale houtjes. Als u in de nieuwe situatie *kijkt* ziet u eigenlijk de beginsituatie weer; maar u *weet* dat er op de as iets gebeurd is. Precies *dát* is wat er kan gebeuren; u hebt dan een *singulariteit* gekregen met eindige energie. Op dezelfde wijze kunt u nog meer slagen op de as concentreren en het aantal geconcentreerde slagen correspondeert met het nummer van de kopie (u weet nog wel, dat verschoven vlak)

waar u in terecht bent gekomen.

Hiermee was het probleem eigenlijk opgelost. Die oplossing is gevonden door het zoeken naar een existentie-bewijs. Dat bewijs leverde de structuur van de oplossing en die was anders dan ik verwacht had. De singulariteit is de diepere reden voor het aanvankelijk falen van de oplossings-technieken.

Ter afsluiting van mijn beschouwing over vloeibare kristallen een open probleem: Kan zo'n singulariteit zich weer afrollen en zo ja, wanneer gebeurt dat dan? Aan dit probleem werk ik op het ogenblik met dr. Dal Passo en professor Bertsch in Rome, die via andere wegen op vergelijkbare vragen waren gestuit.

Wat is nu bereikt voor Akzo Nobel? Afgezien van het feit dat vloeibare kristallen minder belangrijk zijn geworden voor het bedrijf, de volgende zaken:

- Wij kunnen stromingsproblemen voor nematische vloeibare kristallen nu goed modelleren.
- Wij begrijpen dat er lijnsingulariteiten zijn met eindige energie (dat is nieuw, voor zover ik weet).
- Op de weg naar een vruchtbaar gebruik van numerieke methoden lijkt een belangrijke hindernis nu genomen te zijn.
- Diverse nieuwe problemen kunnen nu aanpak worden: andere geometrieën, andersoortige vloeibare kristallen.

Wiskundig gezien zijn deze problemen interessant en zij zullen in mijn onderzoek zeker aandacht blijven krijgen.

### Universiteit Leiden

Hopend u zo een beeld geschetst te hebben van het onderzoek, dat een belangrijk deel van mijn leven vormt, wil ik u nu vertellen hoe de contacten met de universiteit van Leiden en in het bijzonder met professor Peletier, tot stand zijn gekomen. Na mijn eerste numerieke stappen in de toegepaste wiskunde ben ik mij gaan realiseren dat je eigenlijk differentiaalvergelijkingen moet bestuderen als je echt wilt begrijpen hoe een proces werkt. Mijn eerste ervaring op dit gebied kwam voort uit een vraag van mijn toenmalige collega Overdiep, die onderzoek deed op het gebied van verfstroming.

Overdiep had een differentiaalvergelijking afgeleid voor het vlaktrekken van verflagen, dat wil zeggen voor het wegtrekken van onefenheden, zoals kwaststrepen. Hij wilde het gedrag van de oplossing na heel lange tijd berekenen en hij wist niet goed hoe dat moest.

Dat probleem heb ik toen opgelost en ik was nogal trots op het resultaat. Maar ook was mij zeer duidelijk, dat mijn aanpak zeer ad hoc was geweest en dat ik gewoon geluk had gehad met het succes. Toevallig had ik een artikel van Peletier gezien over een diffusieprobleem, een ander belangrijk gebied voor ons. Wij hebben toen besloten Peletier uit te nodigen een adviseursfunctie bij Akzo te aanvaarden. Het eerste gesprek herinner ik mij nog heel goed. Na een paar minuten ging het gewoon over wiskunde. In de loop van dat eerste gesprek wilde ik natuurlijk de oplossing, waar ik zo trots op was, laten zien. Staande voor het bord, was ik op slag vergeten wat ik gedaan had. Met de wijze waarop Peletier dat heeft opgevangen heeft hij toen een nieuwe vriend aan zijn grote collectie toegevoegd.

Peletiers adviseurschap heeft geleid tot een intensieve samenwerking, ook met mensen die ik via hem heb leren kennen. Met name wil ik hier de jarenlange samenwerking met dr. Hilhorst in Parijs noemen. 