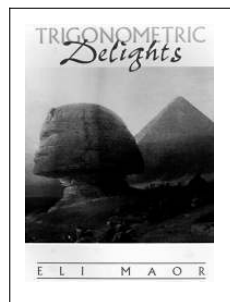


# Boekbesprekingen

Book Reviews

Een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen is te vinden op Internet via:  
<http://www.math.rug.nl/revwg/>  
 Indien lezers er prijs op stellen een van deze verslagen te bespreken, dient men dit binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) te melden bij de redactie van deze rubriek.

Eindredactie: Jaap Top  
 Redactieadres: Boekbesprekingen WG  
 Instituut voor wiskunde en informatica  
 Postbus 800, 9700 AV Groningen  
[revwg@math.rug.nl](mailto:revwg@math.rug.nl)



E. Maor

## Trigonometric delights

Princeton: Princeton University Press, 1998.

236p., prijs £24,95.

ISBN 0-691-05754-0

Trigonometrie is tegenwoordig voor velen een nauwelijks bekend gebied, bij anderen roept dit woord nostalgische gevoelens op. Naar mijn mening biedt het hier te bespreken boek voor beide groepen boeiende literatuur. Het is geen leerboek van de trigonometrie, noch een systematische geschiedenis van dit vak, maar een verzameling van vijftien kleinere opstellen waarin een aantal facetten van het vak op boeiende wijze wordt belicht. In feite is het een interessante herschikking en samenvatting van wat elders verspreid ligt, maar dan wel aangevuld met vaak verrassende doorkijkjes en inzichten. In het voorwoord formuleert de auteur zijn motivatie voor het schrijven van dit boek en grijpt deze gelegenheid aan om stoom af te blazen waar het gaat om de 'New Math'; daarbij rangschikt hij de trigonometrie onder casualties van deze 'New Math'. De vijftien onderwerpen zijn gekozen uit een ruime periode van de geschiedenis van de wiskunde, te beginnen met de Papyrus Rhind (circa 1700 voor Christus) en eindigend met de bijdragen van Fourier (1768-1830). Met veel enthousiasme wijst de schrijver op de schoonheid en de symmetrie van veel formules en op de toepassingsmogelijkheden. Met betrekking tot deze laatste moet vooral het hoofdstuk genoemd worden waarin op zeer heldere wijze de Mercatorprojectie uiteengezet wordt. De stijl van behandelen is uitermate plezierig: geen overdreven strengheid, wel plausibele redeneringen, maar dan ook met de vermelding van wat nader bewijs behoeft. In de noten aan het einde van ieder hoofdstuk vindt de lezer dan de literatuur die het ontbrekende aanvult. Dat men de trigonometrie ook anders en strikt formeel kan benaderen, laat de auteur zien in het hoofdstuk *Landau the Master Rigorist*. Hierin wordt een pagina afgedrukt uit *Grundlagen der Analysis*, die wel kenmerkend is voor de Landau stijl, maar waarvan weinig wervende kracht voor de jeugd zal uitgaan. Het is bekend dat Landau alle meetkundige aspecten van de wiskunde verafschuwde als 'Schmieröl'. Als illustratie geeft Maor dan Landaus bewijs van de goniometrische versie van de stelling van Pythagoras:  $1 = \cos 0 = \cos(x - x) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$ , voilà! Hierbij zijn  $\sin x$  en  $\cos x$  gedefinieerd als de bekende oneindige reeksen. Zonder ergens banaal te worden, schuwt de schrijver *Petite histoire* ook niet. Een voorbeeld: op een zekere dag constateerde De Moivre dat hij iedere dag 20 minuten méér slaap nodig had, hetgeen hem zijn exacte sterfdatum deed berekenen! De berekening die Maor geeft, kan echter niet kloppen, aangezien De Moivre vóór die bewuste dag nooit geslapen zou hebben. Het bijzonder fraai uitgevoerde boek wordt afgesloten met vier korte appendices, een literatuurlijst van 44 titels en een index. Zoals reeds gezegd, is het boek aan te bevelen voor ingewijden en niet-ingewijden. In het bijzonder denk ik aan docenten die hun lessen wat meer kleur en achtergrond willen geven, maar ook aan aankomende studenten en leerlingen van de hogere klassen bij het vwo. Het boek verdient zeker een plaats in de schoolbibliotheek, aange-

zien geïnteresseerde leerlingen er met enige inspanning zelfstandig hun weg in zullen kunnen vinden.

A.W. Grootendorst



J. Mansfeld

### Pappus, mathematicus en een beetje filosoof

Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1998.

20p., prijs f20,- (Mededelingen van de Afdeling Letterkunde, Nieuwe Reeks; 61 #6).

ISBN 90-6984-220-3

Het gaat hier om de gedrukte tekst van een rede die de auteur uitsprak voor de Afdeling Letterkunde van de KNAW en door hem omschreven als een case study op het terrein van de traditiesgeschiedenis van het platonisme. De bedoeling was met enkele voorbeelden aan te geven hoe in de Klassieke Oudheid literaire genres elkaar beïnvloed hebben, in concreto: enkele voorbeelden te geven van de wijze waarop, uit de wiskundige tijdschriften, kennis geput kan worden met betrekking tot de filosofische denkwijze van een *mathematische auteur*. Voor deze laatste viel de keuze op Pappus van Alexandrië (1e helft van de vierde eeuw na Christus). De fragmenten die hierbij aan de orde gesteld zijn gekozen uit de Sunagogè (3 plaatsen) en uit Pappus' commentaar op boek X van de Elementen van Euclides (1 plaats). Op heldere wijze zet de auteur uiteen hoe men uit deze, toch wiskundige, geschriften een kijk op het Platonisme krijgt die de 'kanonieke' literatuur niet verschaft, onder andere het inzicht dat gedurende lange tijd vormen van platonisme naast elkaar hebben bestaan die men geneigd zou zijn diachroon te ordenen. Vooral de bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de Elementen doet Pappus naar voren komen als een wiskundige met wel degelijk filosofische interesse. Het betoog dwingt respect af door de grote eruditie die eruit spreekt. Vermeldenswaard is ook de lof die de schrijver toebrenkt aan de historici van de wiskunde, die hij karakteriseert als 'benijdenswaardig knappe onderzoekers'. Toch roept het betoog enkele kritische opmerkingen op, speciaal waar het gaat om de wiskundige passages. Allereerst deze: op pagina 9 wordt een plaats uit de Sunagogè vertaald: "... dat de bol van alle driedimensionale lichamen die dezelfde omtrek (waarom niet 'oppervlakte', awg) hebben, de bol de grootste inhoud heeft ...". Dat is correct. Wanneer dan drie regels verder wordt gezegd dat "... de bol groter is dan de andere (*ingeschreven*) figuren ...", dan is de opmerking tussen haakjes voor de rekening van de vertaler. Hier wordt de lezer op het verkeerde been gezet. Natuurlijk is deze bewering waar, maar daarom gaat het hier niet: het gaat om lichamen met gelijke oppervlakte, c.q. krommen met gelijke omtrek. Op pagina 10 herhaalt de auteur deze gedachte door te zeggen dat "... van alle onregelmatige figuren in het platte vlak ... met dezelfde omtrek de *omgeschreven* cirkel de grootste is." Overigens is ook het woord 'regelmatig' hier misplaatst. Op pagina 17 komt het probleem van de incommensurabiliteit aan de orde; wij lezen daar (het gaat over de Pythagoreërs): '... zij kwamen volgens de overlevering in moeilijkheden toen bleek dat de hypothenusa (sic!) van een rechthoekige driehoek incommensurabel is met de rechten, dat wil zeggen niet met dezelfde eenheidsmaat te meten'. Met 'de rechten' kunen moeilijk de rechthoekzij-

den bedoeld zijn. Denk maar aan een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5. Uiteraard is hier in eerste instantie een *gelijkbenige* rechthoekige driehoek bedoeld. Duidelijker zou zijn, als geweest was op de incommensurabiliteit van diagonaal en zijde van een vierkant. Zo zijn er meer kanttekeningen te plaatsen, onder andere waar het gaat om het losse gebruik van de term 'regelmatige' lichamen, waarmee in een aantal gevallen 'halfregelmatige lichamen' bedoeld wordt. Ook de voetnoot op pagina 15, waar het harmonische gemiddelde wordt besproken aan de hand van een enkel voorbeeld, zal voor de gemiddelde lezer niet voldoende inzicht geven in dit gemiddelde. Deze opmerkingen doen echter geen afbreuk aan de waardering voor dit — zoals reeds opgemerkt — erudiete artikel, waarmee tevens aan fraaie bijdrage geleverd is aan het leggen van contact tussen de alpha- en de bètawereld. Hopelijk zal de in het uitzicht gestelde gedetailleerde bespreking van Pappus' commentaar op boek X van de Elementen van Euclides niet lang op zich laten wachten.

A.W. Grootendorst



P.J. Nahin

### An imaginary tale The story of $\sqrt{-1}$

Princeton: Princeton University Press, 1998.

257p., prijs \$ 25,95.

ISBN 0-691-02795-1

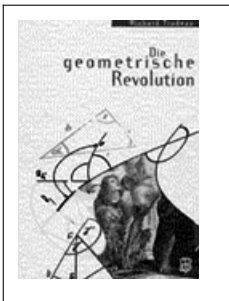
Er zijn veel redenen te bedenken om  $\sqrt{-1}$  een onmogelijk, een absurd, een betekenisloos getal te noemen. In *An imaginary tale* passeren talloze de revue, in de loop der eeuwen door uiteenlopende denkers naar voren gebracht. Van Diophantus die in zijn *Arithmetica* de vergelijking  $172x = 336x^2 + 24$  'onmogelijk' noemde vanwege de uitkomst, tot aan 'royal astronomer' Airy toe, die nog halverwege de negentiende eeuw verklaarde niet het minste vertrouwen te hebben in een resultaat dat met imaginaire symbolen tot stand is gekomen. Aan Nahin de taak te laten zien dat dergelijke symbolen weliswaar imaginair zijn, maar geenszins betekenisloos. Aan die taak zet hij zich met een enthousiasme waaraan de lezer moeilijk ontsnapt. In de eerste drie hoofdstukken laat hij zien hoe wiskundigen in de loop van zo'n 2000 jaar tegen imaginaire getallen aanliepen en in de meeste gevallen zo snel mogelijk doorliepen. Cardano, Descartes riepen 'onherleidbaar' of 'onmogelijk' en zelfs Euler deed dat waar het ging om de meetkundige betekenis van het getal dat hij *i* noemde. Een enkeling — Cardano's leerling Bombelli, Wallis — schrikt er niet voor terug denkbeeldig te rekenen of tekenen en Nahin zelf laat zien hoe je complexe wortels in een uiterst reële grafiek kunt construeren. De eer voor degene die als eerste het complexe vlak definieerde gaat naar de landmeter Caspar Wessel, die echter in het Deens schreef, zodat Argand (en Buë) het tien jaar later nogmaals over konden doen. Geschiedenis is echter niet het doel in deze hoofdstukken, maar een middel om de puzzel van het imaginaire tot leven te brengen door te laten zien bij welke gelegenheden  $\sqrt{-1}$  opduikt en hoe daar mee om te gaan. Daarin slaagt de auteur uitstekend, hoewel hij in zijn enthousiasme af en toe nalaat aan te geven waar hij precies naar toe wil. De laatste vier hoofdstukken draaien om eigenschappen en toepassingen van complexe getallen. Hoewel

Nahin elektrotechnisch ingenieur is, betreffen die laatste voornamelijk wiskundige toepassingen. Wat hij de fysische betekenis van  $i$  noemt, is vooral de meetkundige, en de fysische toepassingen beperken zich tot een afleiding van de Keplerwetten en het doorrekenen van een elektrotechnisch vraagstuk. Zijn ware hartstocht lijkt te liggen bij afleidingen met, dankzij de complexe getallen, onverwachte en elegante uitkomsten. Hoe fraai die resultaten kunnen zijn, weet eenieder die een college complexe functietheorie heeft gevolgd. Het laatste hoofdstuk gaat over die theorie en is misschien wel het meest geslaagde: aan de hand van de ontwikkeling van Cauchy's contourintegratie, geeft Nahin hier in feite een uitstekende inleiding op de theorie. De lezer wordt terecht gewaarschuwd dat *An imaginary tale* geen wiskundig lichtgewicht is. De gemiddelde vwo-er zal zeker moeite hebben met het gemak waarmee algebraïsch gemanipuleerd wordt. Wie daar plezier aan beleeft, vindt hier een schat aan puzzels waarin het mysterie van  $\sqrt{-1}$  van alle kanten belicht wordt.

F.J. Dijksterhuis

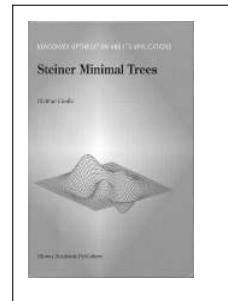
dige/logische denkwijzen en denkachtergronden ontwikkelt, is magistraal. Dit gehele bouwwerk plaatst de schrijver bovendien nog in een, weliswaar enigszins speculatief, wijsgerig kader met betrekking tot begrippen als 'waarheid' en 'kenbaarheid', namelijk in en van de werkelijkheid. Naar mijn mening dient ieder, die zich op enig niveau wenst te bekwamen in ons vak, zich tevens intensief te verdiepen in stof zoals die in dit boek behandeld wordt. Het hangt van de diepgang en de omvang van de opleiding af of de totale inhoud voor ieder aan de orde moet komen. Het maakt natuurlijk enig verschil of men opgeleid wordt tot 2e-graads leraar, tot 1e-graads leraar, of tot beroepswiskundige al of niet ten behoeve van een specifieke richting. Maar zonder (enige) kennis van het hier gebodene mag niemand zich wiskundige, of wiskundeleraar noemen. Het boek van Trudeau is hiervoor een eminente gids. Het is bovendien schitterend uitgevoerd, voorzien van vele opgaven en geschreven in glasheldere taal. Kortom, dit boek betekent een feest voor ieder die zich er in verdiept.

W. Kleijne



R.J. Trudeau  
**Die geometrische Revolution**  
Basel: Birkhäuser Verlag, 1998.  
312 p., prijs DM 68,-.  
ISBN 3-7643-5914-5

Oorspronkelijk is dit boek in 1987 verschenen onder de titel *The Non-Euclidian Revolution*. In 1995 verscheen hiervan de verbeterde en bijgewerkte tweede druk, waarvan het voorliggende werk de Duitse vertaling is. Dit in feite dus al zo'n 12 jaar bestaande boek is dan ook in brede kring langzamerhand een oude en goede bekende. Als tamelijk elementair werk biedt het bovendien, wetenschappelijk wiskundig gezien althans, geen nieuws. Desondanks is en blijft het naar mijn mening een zeer opmerkelijk boek. Speciaal voor de huidige generatie in opleiding zijnde wiskundigen geeft het boek een uniek overzicht van een aantal facetten van de meetkunde. Maar niet alleen zuiver meetkundige zaken, ook meer algemene beschouwingen komen ruim aan bod, waardoor de meetkunde, en meer algemeen de wiskunde, in een bredere context geplaatst wordt. Het boek is dus in de eerste plaats een meetkundeboek, waarbij de euclidische meetkunde in historisch perspectief behandeld wordt, gevolgd door een, eveneens in historische context geplaatste, behandeling van de hyperbolische meetkunde. Het bijzondere van het boek is evenwel dat gedurende de gehele behandeling zeer veel aandacht geschonken wordt aan de logische denkwijze die aan de meetkunde ten grondslag ligt en aan de logische achtergronden van de meetkunde. Het ligt natuurlijk voor de hand dat het aangrijpingspunt hiervoor in het vijfde postulaat van Euclides genomen is. De historische ontwikkeling, culminerend in de ontwikkelingen in de 19e eeuw op het gebied van de niet-euclidische meetkunde, verklaren de term 'revolutie' in de titel van het boek. Inderdaad is hier sprake van een revolutie, even zwaar wegend als die tengevolge van het denken van bijvoorbeeld Copernicus, Newton en Darwin. De wijze waarop de schrijver de meetkundige beschouwingen, in samenhang met de in de loop van de tijd zich ontwikkelende wiskun-



D. Cieslik  
**Steiner minimal trees**  
Dordrecht: Kluwer 1998. 319p., prijs f260,-  
(*Nonconvex optimization and its applications*;  
23). ISBN 0-7923-4983-0

The problem 'For which point the sum of the distances to three given points in the plane is minimal?' was posed by Fermat and solved by Torricelli. It can be generalised in numerous ways: take more than three points, take a higher dimensional space, a metric other than the Euclidian one, ask for the shortest network connecting  $N$  given points. This last question, posed for finite  $N$ , in a finite dimensional normed real linear space (called a Banach-Minkowski space by the author, below BaMi space), and in particular in a plane, is the main topic of this book. The solution is a tree having as vertices the given points and (mostly) some extra, so called Steiner points. It is generally called a Steiner Minimal Tree (SMT), giving, the author argues, a bit to much credit to Steiner. The problem becomes easier if the number of Steiner points allowed is restricted to a fixed  $k$  ( $k$ -SMT). If  $k = 0$  we have the well-known problem of the Minimum Spanning Tree (MST, unfortunately), and in fact operate in a discrete space. In a general metric space an SMT need not exist, in a BaMi space however it does, although it may not be unique. It then has a most  $N - 2$  Steiner points and their degree is at most one larger than the dimension of the space. The infimum (taken over all finite sets) of the ratio of the length of the SMT and that of the MST is the Steiner ratio of the space; it is at least  $\frac{1}{2}$ . For many normed spaces to find an SMT is known to be NP-hard or NP-complete, the latter even in Hakimi's problem where the space is the set of points of a graph with a length function on the edges. The book treats many special cases for many types or normed spaces; Euclidian or Manhattan distance, discrete spaces,  $L_p$ -norm, planes, strictly convex unit balls, et cetera, emphasising the algorithmic and complexity aspects of finding an SMT or an approximation of it, often invoking one of the more than 400, often recent, references, and thus

gives a broad view of the subject. The first two chapters introduce the problem and basic like spaces, metrics, norms and unit balls, convexity and complexity. Of the others we give the subject and, to get the flavour, an interesting result or two. Chapter 3 treats the(?) Torricelli point of  $N$  points; it is unique if the unit ball is strictly convex and the points are not collinear. If the space has dimension  $> 2$  and every triple or quadruple of points has a Torricelli point in its affine hull, then the metric is derived from an inner product. Chapter 4 discusses the degrees of the points in a ( $k$ -)SMT. They never exceed the 'kissing number' of the unit ball. This is the best possible general bound, but for SMT's in a plane with  $L_p$ -norm the maximum degree is 3 if  $1 < p < \infty$ , and 4 if  $p = 1$  or  $p = \infty$  (Manhattan norm and maximum norm, respectively). For  $k$ -SMT's the maximum degree is independent of  $k$ ; in a  $L_1$  or  $L_\infty$  plane it is 8, but 5 for the Steiner points. In Chapter 5 it is shown that the existence of an upper bound for the degree of the Steiner point(s) guarantees that a  $k$ -SMT can be found in a polynomial time if  $k = 1$  and also, if the space fulfills an extra condition, for  $k > 1$ . Note that a  $k$ -SMT can serve as an approximation of an SMT. Chapter 6 (the largest one) treats constructions and algorithms to find SMT's in general or particular BaMi spaces. We find applications of Delaunay triangulations and Voronoi diagrams. In a Euclidean space any SMT lies in the convex hull of the given points; for other metrics with strictly convex unit ball the same only holds for planes. For a BaMi plane an arbitrarily good approximation of an SMT can be found by reducing the problem to that on a graph; the algorithm then is still exponential. Chapter 7 is about upper and lower bounds for the Steiner ratio. Even in the Euclidian case the exact value is only known for the plane:  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . The conjecture for dimension 3 is too intriguing not to be repeated here:

$$\sqrt{\frac{283}{700} - \frac{3\sqrt{21}}{700} + \frac{9\sqrt{11 - \sqrt{21}}\sqrt{2}}{140}}.$$

Chapter 8 mentions a number of ways to even further generalize the problem. These are some minor flaws. The English is not always correct: 'are', 'following', 'bases on' instead of 'is', 'followed', 'is based on', and 'It is  $x > 4$ ' (Es ist?). There are unnecessary repetitions (' $x$  is the convex hull of  $N$ , more formally  $x \in \text{conv}(N)$ '). The definition of linear order (page 58), Dijkstra's algorithm (page 70) and the example of a bisector (page 184) are incorrect. From page 175 on probably all pagenumbers in the index should be raised by 2. The book has an encyclopedic character, contains lots of information and seems a must for those interested in the subject.

R.H. Jeurissen

W.T. Tutte

### Graph theory as I have known it

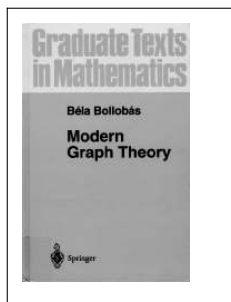
Oxford: Clarendon Press, 1998. 156p., prijs £27,50

(Oxford lecture series in mathematics and its applications; 11).

ISBN 0-19-850251-6

Paul Erdős en Bill Tutte zijn voor mij de twee *Grand old men* van de Discrete Wiskunde. Het was daarom een genoegen dit boek te lezen, waarin Tutte aan de hand van een aantal thema's vertelt hoe hij tot de grafentheorie kwam, en met betrekking tot die thema's, wat zijn eigen bijdragen waren. Ik wil mij beperken tot

enige reacties hier en daar. Als er één boek op het gebied van de grafentheorie is dat ik wil aanbevelen, dan is het dit boek, een heerlijk boek. Hoofdstuk 1 gaat over perfecte vierkanten en heet *Squaring the Square*. Tutte begon in Cambridge met de studie van scheikunde en is via vrienden van de Trinity Mathematical Society in de wiskunde terecht gekomen. Het probleem van het opdelen van rechthoeken in kleinere vierkanten van verschillende grootten werd ontleend aan een boek *The Canterbury puzzles*. Aan de hand van dit probleem ontwikkelden de studenten hun eigen grafentheorie. Ze ontdekten de link met de wetten van Kirchhoff, een bekende bron voor grafentheorie. Het eind van het verhaal is het vinden van het kleinste *perfect squared square* van orde 21 door onze landgenoot Duijvestijn. In de index vinden we verder de Nederlanders Bouwkamp en Kasteleijn. Het bekende paardensprongprobleem op het schaakbord leidde Tutte tot zijn werk aan Hamiltoncykels, zijn bekende tegenvoorbeeld voor het vermoeden van Tait, dat iedere planaire kubische graaf een hamiltongraaf is (dit zou de 4-kleurenstelling inhouden) en zijn stelling betreffende 4-samenhangende planaire grafen. Via het vermoeden van Tait komt men al snel op lijnkleuringen van kubische grafen en de stelling van Petersen uit 1891 dat een brugloze kubische graaf een 1-factor heeft. Tutte's 1-factor stelling komt direct voort uit dit resultaat, maar interessant is vooral dat Tutte het begrip Pfaffiaan uit de oudere literatuur heeft opgeduid en in verband heeft gebracht met 1-factoren. Voor kwadratische roosters zijn dit *dimeerbeleggingen* en dat is waar Kasteleijn bekend mee is geworden in 1963. Na een hoofdstuk over elektrische netwerken komt in hoofdstuk 5, *Algebra in graph theory*, de wel voornaamste bijdrage van Tutte aan de orde. Ik wil hier een zin aanhalen: "I soon perceived that the familiar 4-colourings of planar maps, the Tait colourings of cubic graphs, and the congruences mod 3 with which P.J. Heawood was still attacking the Four Colour Problem were special cases of the ' $n$ -chains' and ' $n$ -cycles' of 'combinatorial topology'. Een en ander leidde tot het bekende 5-flow vermoeden, naast andere nog openstaande vermoedens over flows, tot Tutte-polynomen, en natuurlijk ook tot Tutte's bekende artikelenreeks over matroiden. Dit onderwerp komt aan de orde in hoofdstuk 8, *The cats of Cheshire*, de diersoort die in lucht oplost maar waarvan de grijns overblijft. Dit is een aardige manier om over niet-grafische matroiden te spreken. In de hoofdstukken 6 en 7, over symmetrie respectievelijk grafen op oppervlakken worden interessante onderwerpen als kooien en minors besproken, maar ik heb gekozen voor de zin "In my thesis (van 1948) I made a search for such correspondences, trying to present as much as I could of graph theory in an algebraic form". Zoals voor veel onderzoekers is ook voor Tutte het onderwerp van het proefschrift bepalend voor de rode draad in het verdere werk. Ik noem nog hoofdstuk 9, *Reconstruction*, waarin chromatische polynomen, hoofdstuk 10, *Planar enumeration*, waarin genererende functies, en hoofdstuk 11, *The chromatic eigenvalues*, waarin eigenwaarden van chromatische polynomen aan de orde komen. In de bibliografie telde ik 53 artikelen van Tutte en 1 van Blanche Descartes, de schrijfster, of is het schrijver, van gedichten. Afgezien van de artikelen met zijn jeugdvrienden heeft Tutte haast geen co-auteurs gehad. Zijn Erdős-nummer is niet 1 en misschien zelfs niet 2, tenzij Berman, Brook, Smith of Stone co-auteurs van Erdős zijn geweest. Je hoeft dus geen laag Erdős-nummer te hebben om een waar pionier van de grafentheorie te zijn geweest. C. Hoede



B. Bollobás  
**Modern graph theory**  
 Berlin, etc: Springer Verlag, 1998.  
 394 p., prijs DM 66,-  
 (Graduate texts in mathematics; 184).  
 ISBN 0-387-96488-7

Bollobás heeft twintig jaar geleden een boek over grafentheorie geschreven. Wij hebben toen eens geprobeerd dat te gebruiken voor tweedejaarsstudenten. Het werd een fiasco. De compacte stijl van schrijven maakte het boek ongeschikt voor zelfstudie. De vraagstukken waren duidelijk te lastig voor tweedejaars en we hebben toen maar zelf een dictaat geschreven, mede omdat het materiaal te overvloedig was. Nu ligt er een boek *Modern graph theory* en is het interessant te vergelijken. Wat direct opvalt, is de verbetering van de didactiek. De studenten hebben voor een zeer heilzame terugkoppeling gezorgd. De bewijzen zijn wat meer uitgeschreven en er zijn meer maakbare opgaven. Ook is het aantal voorbeelden duidelijk toegenomen. De hoofdstukken I, II en III zouden goed voor een eerste cursus Grafentheorie gebruikt kunnen worden, maar dan zijn er nog zo'n 300 bladzijden met materiaal dat duidelijk alleen in een cursus voortgezette grafentheorie bruikbaar is, als men al de stofkeuze deelt. Bollobás is Hongaar en dus komen al in hoofdstuk IV problemen aan de orde met resultaten van Szemerédi en Erdős. Je moet er van houden. Kleuringsproblemen, hoofdstuk V, zijn natuurlijk standaard. Het boek is echt *modern*, omdat lijstkleuringen besproken worden, toch echt een recent onderwerp. Voor een hoogleraar in Cambridge is Ramseytheorie natuurlijk een must. Hierna blijkt weer de invloed van Erdős in een ruim hoofdstuk over random graphs. Hierin komt interessant genoeg het concept fasenovergang voor grafen aan de orde. Ik citeer: "Vaguely speaking, before time  $n/2$  (er wordt per tijdstap random een lijn toegevoegd tussen twee van de  $n$  punten) every component has  $O(\log n)$  vertices, but after time  $n/2$  there is a unique largest component of order  $n$  (i.e., containing a constant proportion of the vertices). Even more, all other components are still of order  $\log n$ ; in fact, as  $t$  increases, they are getting smaller." Door mijn achtergrond vind ik dit interessant, maar ik weet niet of ik dit nou in een voorgezet college zou opnemen. In hoofdstuk VIII komt de relatie tussen grafen, groepen en matrices aan de orde en in hoofdstuk IX random walks op grafen. Hoofdstuk VIII zou ik wel behandelen in een voortgezet college, hoofdstuk IX niet. Hoofdstuk X over Tuttepolynomen vind ik zelf weer erg interessant omdat het  $q$ -state Pottsmodel uit de statistische mechanica aan de orde komt, maar de zuivere wiskundige zal vooral kijken naar de behandeling van knopentheorie, Reide-meistertransformaties en Jonespolynomen, die zeer actueel zijn. Hier blijkt wederom dat de schrijver de meest recente ontwikkelingen mee wenste te nemen. Daarom kan men dit boek ook gebruiken voor een caput-college. Als men een dergelijk tripel: Inleiding, Voortzetting, Caputcollege, in het onderwijsprogramma kan opnemen, is dit een ideaal boek om te gebruiken. Zo niet, dan beveel ik aan het toch in elk geval aan te schaffen voor de bibliotheek in verband met de nieuwe ontwikkelingen die aan de orde komen.

C. Hoede

Ian Anderson  
**Combinatorial designs and tournaments**

Oxford: Clarendon Press, 1997. 237 p., prijs £32,50  
 (Oxford lecture series in mathematics and its applications; 6).  
 ISBN 0-19-850019-7

Dit is een sterk herziene versie van een eerder boek *Combinatorial designs; construction methods*. Zoals de nieuwe titel suggereert, wordt er in de nieuwe versie extra veel aandacht besteed aan schema's voor tournooien, zoals bijvoorbeeld een bridgetournooi of een voetbalcompetitie. De toevoeging 'constructiemethoden' uit de oude titel is evenwel nog onverminderd van toepassing. Het boek is gericht op het maken van praktisch toepasbare structuren met behulp van combinatorische middelen. Theoretische aspecten, zoals automorfismen, karakterisering, en non-existentie, worden niet of nauwelijks behandeld. Constructies met behulp van computers komen evenmin aan de orde. In plaats hiervan worden er veel constructiemethoden van veel soorten combinatorische designs behandeld. Dit maakt het boek waardevol als aanvulling op andere boeken over designs. De namen van hoofdstukken geven een goede indicatie van wat er aan de orde komt: 1. Introduction to basics; 2. Difference methods; 3. Symmetric designs; 4. Orthogonal Latin squares; 5. Self-orthogonal Latin squares; 6. Steiner systems; 7. Kirkman triple systems; 8. League schedules; 9. Room squares and bridge tournaments; 10. Balanced tournament designs; 11. Whist tournaments.

Het boek leest prettig en bevat vele interessante historische opmerkingen. Veel wiskundige voorkennis is niet nodig. Eindige lichamen vormen het belangrijkste wiskundige gereedschap, maar die worden in het eerste hoofdstuk geïntroduceerd. Het boek is daardoor toegankelijk voor een breed publiek. Bovendien bevat het vele oefenopgaven, waardoor het boek geschikt is als leerboek. Toch zou ik het, juist vanwege het gebrek aan theoretische vorming, niet willen aanraden voor een inleidende cursus in designtheorie voor wiskundigen.

W. H. Haemers

E.S. Ljapin  
**The theory of partial algebraic operations**

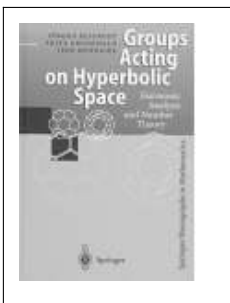
Dordrecht: Kluwer, 1997. 235 p., prijs f248,-  
 (Mathematics and its applications; 414). ISBN 0-7923-4609-2

There is no getting around partial functions. Not in practice: the function that combines two stacks of dishes into one, as every dishwasher knows, is sadly partial. And neither in mathematics: take any algebra (in the sense of a universe with total operations), take out part of the universe, and for all you know you are left with a partial algebra. However, 'political correctness' is not enough to make something a popular, or even a sensible, subject of investigation. The importance of partial algebras was already evident in the characterization of congruence lattices by Gratzer and Schmidt (1963), but for decades the subject did not advance much beyond the complaint that the branching degree of important concepts was three on average. Roughly speaking, there are three kinds of homomorphisms, and three kinds of subalgebras, they interact in nine ways, and so on. A natural response to an overwhelming topic is specialization. In the case at hand, two sorts of directions may be distinguished. One of course is the pursuit of applications: the partial functions that one meets in

practice may be of particular kinds, and some conceptual choices may be more natural for them than others. A good deal of such research is going on in computer science. The other sort begins with a possibly more arbitrary theoretical simplification. This is the approach of the book under discussion: instead of considering structures of several partial operations, the authors restrict themselves to one partial binary operation at the time. These partial groupoids, or pargoids for short, need not be intrinsically easier than the general case after all, any algebra may be embedded in a group (Bergman, 1995) and in any case will still lead to a generalization of the theory of small categories; but we may presumably hope to be guided by the connection to semigroup theory. It seems (I will explain presently why I am so noncommittal) that Ljapin and Evseev have written a thorough monograph, which moreover is very easy reading. After an introductory chapter and a chapter on homomorphisms, the authors treat divisibility and ideal theory; a form of associativity that characterizes the pargoids derived (by taking subsets and homomorphic images) from groups; completing a pargoid to a semigroup; transformation pargoids; and questions of factorisation (in particular, representation of a pargoid as a direct product). Little motivation is given, which is all right as far as I am concerned, after all, why should people write about a side of their subject which does not interest them?

Nonetheless, let me finish with two critical remarks. (1) The title is misleading. The book is about partial groupoids, and it should be left to the prospective purchaser to judge whether it will teach him something about partial (algebraic?) operations in general. (2) The translation is so clumsy as to make the book unreadable to those who would really benefit from such a leisurely exposition. As it stands it contains a good deal of nonsense; because of my severe limitations, of time and Russian literacy, I cannot quite guess how much of it is due to the authors; but their methodological considerations, what there is of them, must have been somewhat ponderous to begin with.

P.H. Rodenburg

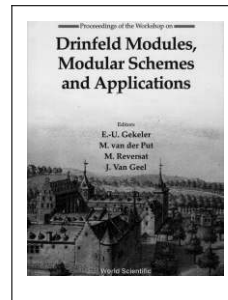


J. Elstrodt, F. Grunewald et al.  
**Groups acting on hyperbolic space**  
 Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.  
 524 p., prijs DM 149,-  
 (Springer monographs in mathematics).  
 ISBN 3-540-62745-6

De in de titel genoemde hyperbolic space is de *drie-dimensionale* hyperbolische ruimte. De werkwijze is klassiek: alles wordt expliciet beschreven in de coördinaten van de 3-dimensionale halfruimte  $H$ , er wordt geen representatietheorie gebruikt, automorfe functies zijn functies op  $H$ , nooit op  $SL(2, \mathbb{C})$ . De stijl is helder, de formulering is zeer nauwkeurig. Enige bekendheid van de lezer met de hyperbolische meetkunde is wel gewenst. Soms wordt voor een bewijs naar de literatuur verwezen. Ook worden veel verwijzingen gegeven betreffende niet behandelde zaken. Een kort overzicht van de inhoud. Hoofdstuk 1, 2: Elementaire zaken betreffende de drie-dimensionale hyperbolische ruimte en discontinue groepen  $\Gamma$  van bewegingen daarvan (discrete ondergroepen van  $PSL(2, \mathbb{C})$ ). Ook, bijvoorbeeld, een onder-

grens voor  $vol(H/\Gamma)$ . Hoofdstuk 3 tot en met 6: Poincaréreeksen, Eisensteinreeksen, Fourierontwikkelingen, Maass-Selbergrelaties. Spectraaltheorie van de Laplace-operator in  $L^2(H/\Gamma)$ , voor  $H/\Gamma$  compact en voor  $H/\Gamma$  met eindig volume. In het compacte geval, de spoorformule voor het product van twee resolventen met als toepassing de afleiding van de eigenschappen van de zeta-functie van Selberg. Deze zeta-functie wordt op zijn beurt gebruikt onder andere bij de asymptotiek van het spectrum. In het niet-compacte geval, meromorfe voortzetting van de Eisensteinreeksen, spectraaldecompositie van  $L^2(H/\Gamma)$ , expliciete vorm van de spoorformule. Op bladzijde 310 eindigt de behandeling van de algemene theorie. Daarna worden drie hoofdstukken waarin  $\Gamma = PSL(2, O)$  met  $O =$  ring van de gehele van een imaginair kwadratisch lichaam. Hierin vindt men onder meer veel concrete resultaten over Eisensteinreeksen. De eigenschappen van de Eisensteinreeksen worden hier overigens opnieuw bewezen; de meromorfe voortzetting bijvoorbeeld, door de Fourierontwikkeling te berekenen. Ook wordt bewezen dat de kleinste groep positieve eigenwaarden van  $-\Delta$ , voor een congruentieondergroep van  $PSL(2, O)$ ,  $\geq \frac{3}{4}$  is. Hoofdstuk 9 is een studie van de binaire vormen met coëfficiënten in  $O$ . In hoofdstuk 10 worden verschillende voorbeelden van discontinue groepen besproken.

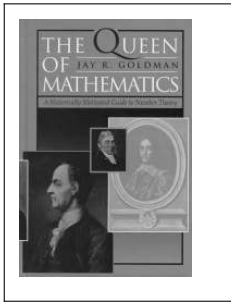
J.G.M. Mars



E.-U. Gekeler et al. (eds.)  
**Drinfeld modules, modular schemes and applications**  
 Singapore: World Scientific, 1997.  
 356 p., prijs £54,-.  
 ISBN 981-02-3067-2

Drinfeldmodulen of, zoals Drinfeld ze zelf noemde, elliptische modulen, werden in 1974 door Drinfeld geïntroduceerd. Hij zag in dat met een dergelijk concept de manier waarmee volgens Langlands Galoisuitbreidingen van allerlei lichamen te beschrijven zouden moeten zijn, heel fraai te realiseren was in een speciaal geval. Namelijk, het geval van functielichamen in karakteristiek  $> 0$ , en groep  $GL(2)$ . Hij gebruikte daarbij de moduli van rang 2 Drinfeldmodulen. De modulen zelf werden in de jaren daarna (en een beetje ook ervoor, want in termen van Drinfelds werk bleek David Hayes al jarenlang rang 1 Drinfeldmodulen te bestuderen) pas echt bekeken. Goss, Gekeler en Deligne & Husemöller schreven diverse overzichtsartikelen en een Springer Lecture Note (LNM 1231, 1986), in 1992 gaf Henri Carayol een Bourbaki-voordracht waarin hij laat zien hoe het oorspronkelijke werk van Drinfeld door onder meer Laumon, Rapoport en Stuhler verder is ontwikkeld. In de jaren '90 verschijnen vervolgens heel wat boeken over het onderwerp. Zo hebben we *The arithmetic of function fields* van Goss et al. (eds) uit 1992, *Basic structures of function field arithmetic* uit 1996 opnieuw van David Goss, twee nogal technische boeken *Cohomology of Drinfeld modular varieties I en II* van G. Laumon uit respectievelijk 1996 en 1997, en verder is veel te vinden in LNM 1649 (1997), getiteld *Vector bundles on curves – new directions*. Het hier gerecenseerde boek probeert de theorie van Drinfeldmodulen en hun moduli vanaf de grond op te bouwen. Daarbij komen zowel (rigide) analytische als alge-

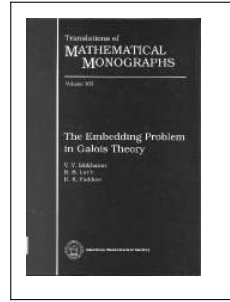
braïsche kanten aan bod. Varianten en uitbreidingen op de theorie, zoals  $t$ -motieven en  $F$ -schoven of Shtuka's komen in het boek nergens aan de orde. Wel wordt een serieuze (en naar mijn heelaas wat bevooroordeelde smaak, geslaagde) poging gedaan om de heel moeilijke resultaten van Drinfeld in detail uit te leggen. Met name hoofdstuk 11 van het boek, over automorfe vormen en Drinfelds reciprociteitswet, is daarbij het vermelden waard. Wie alleen maar een vluchtige kennismaking met het onderwerp wil, zou ik eerder de *Survey of Drinfeld modules* van Deligne en Husemöller (Contemp. Math., 67 (1987)) aanbevelen. Maar voor een diepere studie lijkt dit boek momenteel de beste ingang. *J. Top*



J.R. Goldman  
**The Queen of Mathematics**  
**A historically motivated guide to number theory**

Wellesley: A K Peters, 1998.  
 525 p., prijs \$ 59.95.  
 ISBN 1-56881-006-7

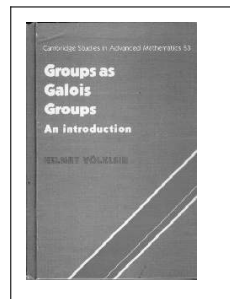
Dit boek is niet het eerste, en vermoedelijk ook niet het laatste met de titel *The Queen of Mathematics*, de omschrijving die Gauss aan de getaltheorie gaf. Wat opzet betreft, is er nogal wat verschil tussen dergelijke boeken op te merken. In sommige boeken wordt heel ver in de geschiedenis terug gegaan. Het onderhavige boek beschrijft wat de auteur 'modern number theory' noemt. Daarmee bedoelt hij de periode vanaf Fermat. Uit het voorwoord valt af te leiden dat het boek ontstaan is uit een cursus getaltheorie vanuit historisch perspectief. Het niveau waarop gemikt wordt, is dat van 'graduate students'. Als voorkennis wordt verondersteld wat abstracte algebra (begrippen zoals groep, ring, lichaam) en enige kennis van calculus van functies van één en twee variabelen. Voor wat bewijzen van stellingen betreft, wordt regelmatig naar andere bronnen verwezen. Het boek is opgesplitst in vijf delen: 1. From Fermat to Legendre; 2. Gauss and the Disquisitiones Arithmeticae; 3. Algebraic number theory; 4. Arithmetic on curves; 5. Miscellaneous topics. Het eerste deel is historisch en geeft beschrijvingen van het werk van achtereenvolgens Fermat, Euler, Lagrange en Legendre. In deel twee wordt een aantal basisbegrippen uit de getaltheorie geïntroduceerd, waarbij de lijn van de Disquisitiones min of meer gevolgd wordt. De delen 3, 4 en 5 zijn onafhankelijk van elkaar, en behandelen een aantal aspecten van de getaltheorie, voortbordurend op de inhoud van de eerste twee delen. In het laatste deel komen daarbij onder andere transcendenten getallen en  $p$ -adische getallen aan bod. In elk hoofdstuk worden veel voorbeelden gegeven, waardoor het geheel zeer leesbaar wordt. In de tekst staat hier en daar een opgave, maar die zijn meer als ondersteuning van het gelezene bedoeld dan als systematische oefening in getaltheoretische vraagstukken. Het boek is netjes uitgevoerd, degelijk gebonden, en voor wat het biedt niet duur. Een mooi boek om te hebben! *A.G. van Asch*



V.V. Ishkhanov, B.B. Lur'e et al.  
**The embedding problem in Galois theory**

Providence, RI: American Mathematical Society, 1997. 182p., prijs \$65,-  
 (Translation of mathematical monographs; 165). ISBN 0-8218-4592-6

Dit boek is een vertaling vanuit het Russisch door N.B. Lebedinskaya; het origineel verscheen in 1990 onder gelijke titel. Een centraal probleem in moderne Galoistheorie behelst het zogeheten 'omkeerprobleem', als volgt. Gegeven een lichaam  $K$  en een groep  $G$ , construeer een uitbreiding  $L/K$  met Galoisgroep (isomorf met)  $G$ . Het 'inbeddingsprobleem' voor lichamen is een veralgemening van het omkeerprobleem, en bestaat uit het vinden van voorwaarden, waaronder men een lichaam  $L$  normaal over  $K$ , met een groep  $G$  kan construeren zodanig, dat  $L$  een gegeven normale uitbreiding  $M/K$  uitbreidt met Galoisgroep  $G/A$ . Bovendien, de vereisten over  $L$  worden gewoonlijk verzwakt:  $L$  dient een Galoisalgebra over  $K$  te zijn, niet zozeer een lichaam. Op deze manier ontstaat een rijk onderzoeksgebied. het boek in kwestie geeft een groot scala aan (technisch) onderzoek en de vorderingen erin weer. Het is systematisch van opbouw. Een eerste indruk is dat het voorziet in een behoefte om dit onderzoek dat essentieel in 1920 startte en dat tot heden voortduurt, in boekvorm te presenteren. Een goed doch technisch boek bestemd voor een ieder die in Galois-omkeer-problematiek is geïnteresseerd. *R.W. van der Waall*



Helmut Völklein  
**Groups as Galois groups**  
**An introduction**

Cambridge: Cambridge University Press, 1996.  
 248 p., prijs £35  
 (Cambridge studies in advanced mathematics; 53). ISBN 0-521-56280-5

Ondertitels zoals 'an introduction' en varianten daarop lezen we zo regelmatig en (naar mijn smaak) zo vaak onterecht op wiskundeboeken, dat er wel eens wat kritischer mee mag worden omgegaan. Dit boek gaat over de vraag of je, gegeven een eindige groep  $G$  en een lichaam  $K$ , een eindige lichaamsuitbreiding van  $K$  kan maken die Galois is over  $K$  met groep  $G$ . De woorden in bovenstaande zin behoren niet tot de 'introduction' die het boek geeft. Voor zulke voorkennis kan je, weet de auteur, bij 'most introductory algebra books' wel terecht. Het onderwerp is dus het realiseren van eindige groepen als Galoisgroepen. Hierover bestaan wel meer teksten, zoals een heel fraaie Bourbaki-voordracht van J-P. Serre (1987/88), het boek *Topics in Galois theory* (1992) ook van Serre, de Springer Lecture Notes *Konstruktive Galoistheorie* (1987) van B.H. Matzat, en het al vele jaren aangekondigde boek van Malle en Matzat met als titel *Inverse Galois theory*, waarvan sinds 1993 enige hoofdstukken als IWR-preprints in Heidelberg verschenen zijn. Je kan denk ik met recht zeggen dat het huidige boek zeker een introductie levert tot een belangrijk

deel van de in bovenstaande boeken behandelde onderwerpen. Toch zou ik als kennismaking met het onderwerp eerder Serre's Bourbaki-voordracht aanbevelen, of de beschikbare stukjes van wat het Malle & Matzat-boek moet worden. De moderne strategie die het meest algemeen wordt gebruikt bij het realiseren van Galoisgroepen kan je in al deze teksten beschreven vinden. Het hier gerecenseerde boek probeert daarbij alle argumenten zo compleet mogelijk te geven. Concepten en resultaten uit diverse delen van de wiskunde worden daarbij zorgvuldig ingevoerd, beschreven en in de meeste gevallen zelfs keurig bewezen. De spreekwoordelijke Duitse grondigheid is Helmut Völklein bepaald niet vreemd. Persoonlijk heb ik wel enige moeite met zijn stijl, om maar niet meteen ronduit te zeggen dat het me op allerlei plekken in het boek ronduit tegenstaat. Zo is er de gewoonte van de auteur, vaak ellenlange proposities te formuleren met als onderdeel ervan dan ook nog terloops wat nieuwe notaties en begrippen. Sommige niet algemeen gangbare afkortingen en conventies verwekken een lichte hoofdpijn: zo staart vanaf vele pagina's het begrip 'FG-extension', of als u deze liever heeft, 'RET' u tegemoet. Dat betekent dan respectievelijk 'finite Galois extension' en 'Riemann existence theorem'. Toch denk ik dat het schitterende onderwerp van dit boek, ondanks de wat stijve manier waarop het hier verpakt wordt, wel uit de tekst te halen valt. Het boek staat in zeker opzicht heel aardig tegenover dat van Serre: deze stipt heel summier de hoofdlijnen van de theorie aan en geeft aansprekende voorbeelden. Bij Serre krijg je de indruk dat je weliswaar heel wat voorkennis mist, maar de grote lijn blijft duidelijk en minstens zo duidelijk is de fraaiheid van de theorie. Bij Völklein kan je veel van dezelfde voorbeelden na enig zoeken ook wel vinden. Verpakt tussen bergen soms wat taaie notatie en stukjes uitleg die zo uitvoerig zijn dat de kans reëel is dat je door de bomen het bos niet meer ziet. Maar al die details staan er tenminste, en dat heeft toch ook wel z'n voordelen.

Iets meer over de inhoud: de eerste helft van het boek beschrijft de strategie waarmee groepen gerealiseerd worden. Eerst doe je dat topologisch, als groep van dektransformaties van een overdekking van het boloppervlak minus eindig veel punten. Vervolgens wordt dit eerst topologisch afgesloten, en daarna krijgen de ruimten de structuur van Riemann-oppervlakken. Een lichaamsuitbreiding met de gevraagde Galoisgroep heb je dan door naar de bijbehorende uitbreiding van de lichamen van meromorfe functies te kijken. Tenslotte zijn er criteria in termen van de gegeven overdekking (helemaal te beschrijven in termen van de eindige groep) die garanderen dat de gevonden lichaamsuitbreiding verkregen is door uitbreiding van constanten uit iets als  $\mathbb{Q}(x)$ . En hebben we daarvan een uitbreiding met gegeven Galoisgroep, dan vertelt Hilberts irreducibiliteitsstelling dat een uitbreiding met dezelfde groep verkregen wordt door voor  $x$  een geschikt gekozen getal in te vullen. Dit boeiende mengsel van algebra en groepentheorie, topologie, complexe functietheorie, Riemann-oppervlakken en zelfs een beetje functionaalanalyse vormt in heel veel detail de eerste helft van het boek. Vervolgens stipt de auteur wat minder uitvoerig een aantal verdere richtingen in dit gebied aan: vlechtgroepen, Hurwitz-ruimten (kennelijk is de auteur niet op de hoogte van heel fraai werk van Michel Emsalem (1995) hierover), embedding problems, en tenslotte zelfs enige rigide analytische methoden, in de richting van recent werk van Harbater en van Raynaud. Al met al, ondanks de manier van presenteren, een boek waar iemand die zich serieus in deze materie wil inwerken

niet omheen kan.

J. Top

W. Bruns, J. Herzog  
**Cohen-Macaulay rings**

(Revised edition).

Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 453 p., prijs £24.95 (pb)

(Cambridge studies in advanced mathematics; 39). ISBN 0-521-56674-6

De eerste gebonden uitgave van dit boek werd besproken in Mededelingen 39 (1996 #4 pagina B77). In deze paperback-editie zijn natuurlijk foutjes en onnauwkeurigheden grotendeels herzien, maar er zijn vooral drie nuttige tot belangrijke toevoegingen. In paragraaf 4.3 worden dikwijls gebruikte stellingen van Gotzmann behandeld over Hilbertpolynomen van factorringen van een polynoomring over een lichaam. Deze hangen samen met de zogenaamde Castelnuovo-Mumford-regulariteit. In paragraaf 5.5 wordt een berekening van Hochster voor de Bettigetallen van een Stanley-Reisnerring nu ook werkelijk uitgevoerd. De gewichtigste noviteit is echter een nieuw hoofdstuk 10 over 'tight closure'. Dit is een subtiele verfijning van gehele afsluiting die in positieve karakteristiek leeft dank zij het Frobenius-endorfisme. In een lange rij van artikelen is de theorie hiervan ontwikkeld door Hochster en Huneke mitsgaders hun leerlingen en medewerkers. Voor het eerst in een monografie, poogt dit hoofdstuk een inleiding tot deze materie te bieden. De theorie is hierom van belang, omdat zij in staat stelt soms simpeler bewijzen te geven van bestaande resultaten in karakteristiek  $p$ , soms scherpere stellingen te verkrijgen of geheel nieuwe inzichten. Een deel van dit moois vindt weerklank in ongemengde karakteristiek 0 dank zij algemene technieken van 'reductie tot positieve karakteristiek'. Helaas, in gemengde karakteristiek lijkt 'tight closure' nog niets te bieden. Het nieuwe hoofdstuk, dat tot plaatselijke herziening in belendende tekst noopte, is een duidelijke aanwinst, want het leidt kort in tot de denkwereld van H-H, die nu ook buiten hun kring weerklank begint te vinden. Voeg hier aan toe dat deze herziene editie bijna de helft goedkoper is dan de oorspronkelijke gebonden uitgave, en men begint medelijden te krijgen met de arme sloebers die zo nodig er als eersten bij wensten te zijn. J.R. Strooker

G. Laumon

**Cohomology of Drinfeld modular varieties**

Cambridge: Cambridge University Press, 1996-'97.

Part 1: Geometry, counting of points and local harmonic analysis.

Part 2: Automorfix forms, trace formulas and Langlands correspondence.

344p., 366p. prijs £40.-, £40.- (Cambridge studies in advanced mathematics; 41, 56). ISBN 0-521-47060-9, 61-7

Classical modular curves, and generalizations to Shimura varieties are connected to reductive groups and several other data. These objects give varieties over number fields. Several central ideas in classical and modern mathematics are connected with these concepts. Cohomology of Shimura varieties is related with automorphic forms over number fields. Trace formulas, the Langlands programme and many other aspects are in the centre of nowadays mathematics. In 1973 Drinfeld discovered an analogy of these concepts. The Drinfeld modular varieties depend on several data, one of which is a function field in one variable in positive charac-



teristic. The resulting variety is defined over a finite field, fibered over a curve. Once these concepts are born, we can try to carry further the analogy (both cases 'living' over a global field), and we can try to see how far we can get. This is of interest in order to see how much of the 'classical' programme can be carried out in this way (and thus obtaining more insight in possible developments); also this opens a completely new, independent point of view and lends itself to various applications. These books give a beautiful and systematic approach to this topic. We see old concepts in a new disguise; modular varieties are constructed (in this case following Drinfeld), Hecke operators appear, cuspidal functions, and trace formulas are studied, cohomology with compact supports is one of the main goals of the second volume. In a short review it is not possible to give sufficient information for a reasonable description of the contents of these books. In both volumes the author give an excellent preface in which the contents is very well described, and we advice the interested reader to consult those pages. Every chapter ends with a section 'Comments and references'. I found this aspect of these books very helpful. The author acknowledges to which extent material is taken from other sources. Appendices describing some methods used are precise and informative. I found these books very well written. This is the way to document a broad field. The author indicates the relation to other aspects, descriptions (of this highly technical field) are nice. Anyone taking the trouble to read this non-easy material will be rewarded. Highly recommended!

F. Oort

L. Schneps, P. Lochak (eds.)

### Geometric Galois actions

Vol. 1: *Around Grothendieck's esquisse d'un programme.*

Vol. 2: *The inverse Galois problem, moduli spaces and mapping class groups.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

293, 347 p., prijs £24.95, £24.95

(LMS lecture notes series; 242, 243). ISBN 0-521-59642-4, 41-6

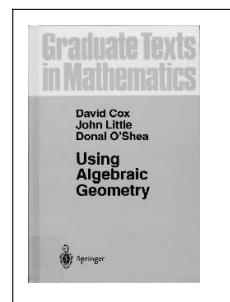
Deze beide delen komen voort uit een reeks fascinerende vermoedens, stellingen en ontwikkelingen op gang gebracht door manuscripten die Grothendieck schreef nadat hij zich uit het circuit van officiële publicaties had teruggetrokken. Wie had 'lang geleden' kunnen denken dat de volgende onderwerpen nauw met elkaar verbonden zijn? 1. Overdekkingen van algebraïsche krommen; 2. Kindertekeningen op een Riemann oppervlak; 3. Het omkeerprobleem van de Galois theorie: *Voor elke eindige uitbreiding  $\mathbb{Q} \subset K$  en voor elke eindige groep  $G$  is er een surjectief homomorfisme  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a, K) \rightarrow G$ ?* We schrijven  $\mathbb{Q}^a$  voor een algebraïsche afsluiting van  $\mathbb{Q}$ ; 4. Teichmüller theorie.

Een van de fundamentele resultaten die deze ontwikkelingen op gang bracht, was een stelling van G. V. Belyi in 1980: *Een Riemannoppervlak  $S$  hoort bij een algebraïsche kromme  $X$  gedefiniëerd over een getallenlichaam, d.w.z.  $S = X(\mathbb{C})$ , dan en slechts dan als er een overdekking  $S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  naar de Riemannscheer bestaat die in hooguit 3 punten van  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  vertakt.* Grothendieck, die na 1970 minder dan daarvoor de last ervoer van 'tâches interminables' (zie *Esquisse* pagina 51) begon na te denken over de aritmetische consequenties van dit onverwachte verband. 1. In een tekst *Esquisse d'un programme* (1984, 57 pagina's) beschrijft Grothendieck zijn 'réflexions' over deze onderwerpen. Nog steeds vormt die tekst een grote bron van inspiratie! De tekst van *Esquisse d'un program-*

*me* wordt (voor het eerst) als gedrukte tekst in deel 1 van deze bundels gepubliceerd. 2. In een brief (1983, 8 pagina's) aan Faltings ontvouwde Grothendieck zijn 'anabelse vermoedens': probeer in te zien of uit het feit dat twee variëteiten isomorfe fundamenteelgroepen hebben, geconcludeerd kan worden dat die variëteiten isomorf zijn (zie ook *Esquisse*, paragraaf 3). Dit vermoeden inspireerde al heel wat wiskundigen. Voor algebraïsche krommen is dit verband aangetoond (A. Tamagawa en Mochizuki); voor variëteiten van hogere dimensie is het onderzoek in volle gang (F. Pop en vele anderen). De tekst van deze brief aan Faltings verschijnt in gedrukte vorm in het eerste deel van deze bundels. 3. In zijn handgeschreven versie van *La longue marche à travers la théorie de Galois* (1981, 1600 pagina's) begint Grothendieck aan het ontvouwen van zijn indrukwekkende gedachten, die onder andere de Grothendieck-Teichmüller theorie omvatten: *Construeer een groep die  $GT$  wordt genoemd, die blijkt  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$  als ondergroep te bevatten, en wat zou het mooi zijn als die twee groepen gelijk zouden blijken te zijn?!* In dat geval zouden we over een zuiver meetkundige beschrijving van  $\text{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$  beschikken. Deze twee delen verzamelen een aantal artikelen die ontwikkelingen rond deze thema's beschrijven. In het eerste deel wordt de tekst van Grothendieck van *Esquisse d'un programme* uitgegeven; een vertaling ervan in het Engels wordt gegeven; de tekst van de brief uit 1983 van Grothendieck aan Faltings wordt gepubliceerd. In het tweede deel worden teksten samengebracht die geschreven zijn naar aanleiding van een conferentie in Luminy, 1995, over het thema 'Geometry and arithmetic of moduli spaces'. In het korte bestek van een boekbespreking is het niet mogelijk de wetenschappelijke omvang van dit werk van Grothendieck te beschrijven, evenmin als dat mogelijk is wat betreft de inhoud van de 24 artikelen die hier samengebracht zijn. Het lijkt wel of alle auteurs van deze artikelen aangestoken zijn door: "Plutôt que de suivre (comme prévu) un ordre thématique rigoureux, je me suis laissé emporter par ma prédilection pour un thème particulièrement riche et brûlant ..." (Grothendieck in paragraaf 3 van *Esquisse*). We zien een rijke mengeling van stukken tekst die de onderliggende gedachte van een fundament voorzien ('basic setup'), van beschrijving van werk wat er recent aan deze onderwerpen gedaan is, vaak met uitvoerige verwijzingen, en van artikelen die speculaties bevatten hoe deze gedachten zich verder zouden kunnen ontwikkelen. Zeer aanbevolen!

De editors: "We dedicate all our efforts to Alexandre Grothendieck, with warmest sincerity and affection." Waar ik me graag bij aansluit.

F. Oort



D. Cox, J. Little et al.

### Using algebraic geometry

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

499 p., prijs DM 78,- (pb)

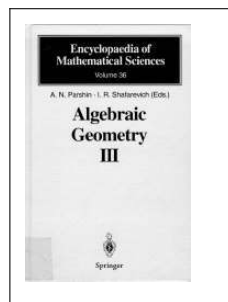
(Graduate texts in mathematics; 185).

ISBN 0-387-98492-5

Polynomen staan aan de basis van de algebraïsche meetkunde. De ontwikkelingen op het gebied van algoritmen voor polynomen en verwante objecten uit de laatste decennia alsmede de implemen-

tatie van vele algoritmen in diverse computeralgebrapakketten, hebben de algebraïsche meetkunde een nieuwe stimulans gegeven en eveneens voor nieuwe toepassingen gezorgd. De auteurs beogen met het boek de relevante technieken en de toepassingen te beschrijven voor de niet-specialist. Als voorkennis worden standaardzaken uit de algebra verwacht (groepen, ringen, lichamen). Het boek sluit goed aan bij het eerdere boek *Ideals, Varieties and Algorithms* van de auteurs, al is de stijl van schrijven wat compacter en wat meer gericht op de beter ingevoerde wiskundige/wiskundestudent, en al is er enige overlap. Aan de orde komen Gröbnerbases, resultanten (inclusief verbanden met torische variëteiten), diverse zaken uit de commutatieve algebra (lokale ringen, syzygiën, resoluties), en toepassingen in de gebieden integer programming, combinatoriek, splines en coderingstheorie. Om diverse algoritmische zaken te illustreren, zijn Maple-routines in de tekst opgenomen. Het boek is zo opgezet dat er op meerdere manieren een cursus uit samengesteld kan worden. Zo kan na de onontbeerlijke inleiding over Gröbnerbases en systemen van vergelijkingen (hoofdstuk 1 en 2) elk van de drie boven genoemde gebieden (resultanten, commutatieve algebra, toepassingen) min of meer onafhankelijk van elkaar aan de orde komen. Samen met de vele opgaven zijn diverse stukken ook goed te gebruiken als, of om te vormen tot, (tentamen-)projecten bij een al bestaande cursus op het gebied van effectieve methoden in de algebra of algebraïsche meetkunde. In hoofdstuk 1 wordt de algoritmische kijk op het rekenen met polynomen uiteengezet culminerend in het Buchberger-algoritme voor het bepalen van een Gröbnerbasis voor een ideaal in een polynoomring. Daarnaast is er enige aandacht voor het verband tussen idealen en affiene variëteiten. Het tweede hoofdstuk gaat in op het oplossen van stelsels polynomiale vergelijkingen en legt het verband met algebra's. Eindigdimensionale algebra's en methoden uit de lineaire algebra krijgen daarbij speciale nadruk. Het klassieke onderwerp 'resultanten' staat centraal in hoofdstuk 3: eigenschappen en de rol van resultanten bij het oplossen van vergelijkingen. In hoofdstuk 4 worden computationele aspecten van lokale ringen bestudeerd (bijvoorbeeld multipliciteiten) en analoga van Gröbnerbases in de context van lokale ringen. De volgende twee hoofdstukken behandelen modulen (Gröbnerbases voor modulen, presentaties, resoluties, syzygiën, Hilbertpolynomen). Een interessant verband tussen geheeltallige en combinatorische problemen enerzijds en polynomen anderzijds ontstaat door de geheeltallige coëfficiënten uit zo'n probleem als exponenten in polynomen op te nemen. Dit verband wordt in de hoofdstuk 7 en 8 uitgediept in verschillende richtingen. In hoofdstuk 7 komt de klasse van torische variëteiten aan de orde. Torische variëteiten worden gemaakt uit (systemen van) polytopen. De constructie verbindt daarmee combinatorische en algebraïsch meetkundige objecten. Ook bespreken de auteurs de stelling van Bernstein over een verband tussen aantallen oplossingen van een stelsel vergelijkingen en de meetkunde van polytopen. Hoofdstuk 8 gaat in op het herformuleren van integer programming problemen in termen van polynomen en het nut van Gröbnerbasistechnieken bij het oplossen van zulke problemen. De laatste paragraaf bespreekt een relatief recente toepassing van Gröbnerbasistechnieken: de constructie van splines op polyhedrale onderverdelingen van gebieden in  $\mathbb{R}^n$ . Het laatste hoofdstuk is gewijd aan coderingstheorie. Behandeld worden de constructie van codes, al dan niet met behulp van algebraïsche meetkunde, en de rol van Gröbnerbases bij de bestudering van co-

des, bijvoorbeeld bij het decoderen. Het boek is een nuttige aanwinst om bij of naast een college te gebruiken. Voor gebruikers van het boek onderhouden de auteurs een website. *H. Sterk*



A.N. Parshin et al.  
**Algebraic geometry III**  
**Complex algebraic Varieties**  
**Algebraic curves and their Jacobians**  
 Berlin, etc.: Springer Verlag, 1998.  
 270 p., prijs DM 158  
*(Encyclopaedia of mathematical sciences; 36).*  
 ISBN 3-540-54681-2

This volume of the Encyclopaedia of mathematical sciences gives in 1998 translations of two Russian manuscripts from 1989. Reading this material I wonder why Springer-Verlag, and the editors of the Encyclopaedia have chosen to publish this material. These are highly interesting topics. And we would welcome good textbooks on them. However these texts do not fall into that classification. Clearly publishing a book almost ten years after the manuscripts were finished, has the outcome that results and references are not up-to-date. Why not try to find a new author for these topics, or ask the present authors to update and revise their manuscripts? However, things are worse. Not only are references after 1989 lacking, but also important earlier results and crucial references are missing. From the manuscript it is clear that the authors at the time or writing were not informed about many 'new' developments. Several central results are not present. Or, results are mentioned without a proper reference, even if the material appeared long before 1989; e.g. on page 235 we find the 'Connectedness theorem' by Fulton and Lazarsfeld, why not give the reference to their paper which appeared in 1981? We all know that a book with such lacunas is not of much use. We could hope that at least the classical theory is well-recorded. However, also that is not the case. For example, 2.5.4 'Moduli spaces' is a text which is vague, full of dubious statements, missing crucial points. When applying these, the arguments are incomplete; e.g. on page 101: "Thus, the coarse moduli space  $M$  for elliptic curves is nothing else but the affine line  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$ " (their arguments do not show this, 'thus' is not justified), or arguments and conclusions are plainly wrong, e.g. on page 105: "This is related to the observation that the neighborhood of the point  $[X]$  in the moduli space  $M_g$  is analytically isomorphic to the quotient of  $S$  by an action of an involution...". The translation is not satisfactory ('curves of degree 2' meaning curves of genus 2, see page 212). Misprints in the list of references make life difficult, e.g. the reference Serre (1950), page 216, should be Serre (1956). This book reviews classical literature and results, for example on periods of integrals and on the Schottky problem. Those parts are nicely written and as such the present book has its merits. However on the whole I think care should have been taken to avoid the publication of texts with lacunas and mistakes as in this volume. This seems far below the usual level of this publishing company. *F. Oort*



J.L. Bell  
**A primer of unfinished calculus**  
 Cambridge: Cambridge University Press,  
 1998. 122p., prijs £19,50.  
 ISBN 0-521-62401-0

In a set-theoretical context, a continuum is viewed as a collection of points without gaps, and because of the discrete nature of these entities, there can be no continuum within the framework of set theory. In one way or another this objection to the set-theoretical foundation of mathematics has been frequently heard, in this century notably from L.E.J. Brouwer and René Thom. It is thought that the continuum of real numbers derives its 'continuity' not merely from the absence of gaps, but from certain features of additional structures (order-theoretic, topological) that are imposed on it. It is here that infinitesimals have an essential part to play. The infinitesimals of this book should not be confused with those introduced by A. Robinson in the sixties in the context of nonstandard analysis. In the present book the infinitesimals are part of a theory, created in the seventies as the byproduct of a development in the category theory, of a smoothly continuous world. This is essentially a theory of zero-square infinitesimals, quantities that can be thought of as being so small that their squares and higher powers can be neglected. Since all functions in  $\mathbb{S}$  are continuous, it follows that the law of excluded middle is bound to fail. In particular, the statement 'for all real numbers  $x$ , either  $x = 0$  or *not*  $x = 0$ ' is false in  $\mathbb{S}$ . On this basis the book develops the usual elements of the differential and integral calculus of a single variable and of several variables. Naturally, this approach is characterized by the complete absence of the concept of limit, theorems are derived by purely algebraic means. The description of the derivative of a function given below serves to illustrate the nature of  $\mathbb{S}$ . First, let  $R$  be the smooth real line, and denote  $\Delta$  the part of  $R$  consisting of all  $\varepsilon$  for which  $\varepsilon^2 = 0$  (the infinitesimals or micro quantities). Now let  $f$  be any given function  $f : R \rightarrow R$ . For fixed  $x \in R$ , define  $g_x : \Delta \rightarrow R$  by  $g_x(\varepsilon) = f(x + \varepsilon)$ . then, by the so-called principle of Microaffineness – which says that the graph of any map  $g$  with domain  $\Delta$  is a unique line passing through  $(0, g(0))$  – we have  $g_x(\varepsilon) = g_x(0) + b_x\varepsilon$ , so that  $f(x + \varepsilon) = f(x) + b_x\varepsilon$ . Then varying  $x$  and writing  $f'(x) = b_x$  yields the derivative  $f'$  of  $f$ . Observe that in  $\mathbb{S}$  every map  $F : R \rightarrow R$  has a unique derivative. Apart from the basic elements of calculus, the book also gives many applications of differential calculus (to physics for instance), it gives a brief introduction to synthetic differential geometry and it closes with a chapter on  $\mathbb{S}$  as an axiomatic system. In an appendix the construction of models for smooth infinitesimal analysis is sketched. Here the reader should be familiar with the basics of category theory. It was a real pleasure to read this book, not in the least because of the abundance of well-chosen, often historical examples. Finally, anyone with a basic acknowledge of calculus won't have many difficulties. The book should be of interest to most mathematicians, especially to those with a taste for the philosophy of mathematics.

R.J. Stroeker



G.V. Milovanović (ed.)  
**Recent progress in inequalities**  
 Dordrecht Kluwer, 1998.  
 519p., prijs f395,-  
 (Mathematics and its applications; 430).  
 ISBN 0-7923-4845-1

This volume is a collection of papers presented at an International Memorial Conference dedicated to the late Dragoslav S. Mitrinović (1908-1995). It was held at the Faculty of Electronic Engineering, University of Nis, Yugoslavia, from June 20-22, 1996. D.S. Mitrinović, who dedicated much of his mathematical life to his great passion, the study of inequalities of all kinds and shapes, is probably best known from his monograph, *Analytic Inequalities* with P.M. Vasić, published by Springer-Verlag in 1970. The memorial conference was split up into three sections: *Recent progress in inequalities*, *Advances in mathematical analysis*, and *Topics in mathematics and applications*. Only a selection of papers on inequalities found its way into this volume. The book is divided into three sections as well: an *Introduction* to the life and scientific work of D.S. Mitrinović, *Invited papers* (a total of 19) and *Contributed papers* (15 in all). The first part starts with an essay on Mitrinović's life, followed by an seemingly complete overview of his scientific publications (over 300 papers, 16 monographs and 35 textbooks). The papers of the next two sections are listed alphabetically by author and apparently no effort has been made to try and group them into some sort of natural order. Understandably so, I think, because the variety of topics would probably prevent a successful subdivision into groups of more than one anyway. Almost all papers have an analytical flavour. Some provide lists of related inequalities attributed to Vietoris, Hardy, Marcinkiewicz-Zygmund, Shapiro, Bernstein, Wirtinger, Ostrowski, Fan-Todd, Cauchy, Landau, and others, and I found classical polynomial inequalities in Elliptic boundary value problems, Help-type integral and series inequalities, inequalities in circular arithmetic, error inequalities for Hermite and Spline interpolation, and many more. For those with an interest in analytical inequalities, this is a valuable addition to the already vast literature, to be consulted in a public library. Indeed, the exorbitant price will probably prevent most individuals from ordering this volume for their private libraries.

R.J. Stroeker

H.A. Priestly  
**Introduction to integration**

Oxford: Clarendon Press, 1997. 306 p., prijs £40,-  
 (Oxford science publications). ISBN 0-19-850124

'Integration' in the title denotes the Daniell version of the Lebesgue integral. This is not uncommon in textbooks since Riesz and Nagy's *Leçons d'analyse fonctionnelle* (1952), even when Riemann's integral stays dominating the Calculus. In the Daniell version the integral is a linear functional on a suitably constructed space of functions, their integral obviously being an area. By repeated extensions of this set of functions as well as of the functional at last the Lebesgue integral and the space of integrable

functions are reached. The author of the present book develops this construct, pauses at several stages to look at practical details of integration that have then come within reach of the reader and thus combines the reader's growing understanding with improving his skill in integration technique. The book is divided into 34 rather short chapters, again facilitating the interplay between growth and skill. Only two of these chapters are devoted to measure (apart from null sets) and so the book is 'not a book for aficionados of measure theory', as the preface admits. The first twelve chapters give the construction already mentioned, then follow the main theorems on convergence, Fubini, connections with derivatives, and so on; in the last seven chapters are what you might call applications:  $L^p$ -spaces, Fourier series and transforms, Hilbert space, probability. The book is well written, in a catching style, with appropriate warnings in difficult places and numerous well-chosen examples and exercises. A modest bibliography gives 19 titles for further study. There are some silly misprints and also a few errors, most of them easily recognizable. The book is at once an attractive textbook for students of analysis and an accessible source of information for the analyst. It will not conquer the Riemann integral but certainly may contribute to the appreciation of Lebesgue's integral.

W. van der Meiden

theory. The problem now is to minimize the weighted energy

$$I_w(\mu) = \iint \log \frac{1}{|z - \zeta|w(z)w(\zeta)} d\mu(z) d\mu(\zeta) = I(\mu) + 2 \int Q d\mu$$

for probability measures  $\mu$  on  $E$ , where  $w = e^{-Q}$ . Depending on  $Q$ , the set  $E$  may even be unbounded. It is shown that there is still a unique extremal measure  $\mu_w$ , but in contrast to the unweighted problem, its support  $S_w$  need not coincide with the outer boundary of  $E$ . The properties of extremal measures take up an important chapter in the book. Other chapters deal with the recovery of measures from their potential and potential theory for signed measures. There is an appendix on the Dirichlet problem and an appendix by Thomas Bloom on weighted approximation in  $\mathbb{C}^N$ . The external field problem provides a *unified approach* to many seemingly unrelated problems of approximation which are discussed in detail. They include the asymptotic analysis of orthogonal polynomials on an unbounded interval, the study of so-called fast decreasing polynomials:

$$p_n(0) = 1, \quad |p_n(x)| \leq \exp(-n\phi(x)), \quad -1 \leq x \leq 1$$

for suitable  $\phi \geq 0$ , the study of incomplete polynomials  $\sum_{k=\theta n}^n a_k x^k$  where  $0 < \theta < 1$ , the asymptotic behavior of ray sequences of Padé approximants, rates of convergence of best approximating rational functions, numerical conformal mapping, random matrices and much more. The monograph is self-contained and carefully written; it should be accessible to students with a standard background in classical and functional analysis. Finally, in this review for a Dutch journal it is appropriate to mention that the book describes several of the contributions by Arno Kuijlaars for which he received the 1998 Popov Prize in Approximation Theory.

J. Korevaar



E.B. Saff, V. Totik  
**Logarithmic potentials with external fields**  
 Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1997.  
 505 p., prijs DM 158  
 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 316). ISBN 3-540-57078-0

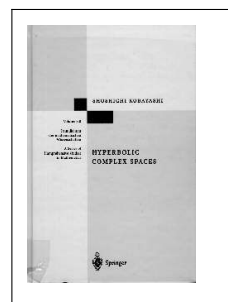
In recent years there has been important interaction between planar potential theory and approximation theory. Most of the new results involve the case where there is an external field present. The present monograph first develops this 'weighted' potential theory in analogy with Frostman's theory for the classical case. Somewhat more than half of the book is devoted to applications. Many of the results are due to the authors and have not appeared in book form before. To describe the 'problem area' it is convenient to use the language of two-dimensional electrostatics. One studies the equilibrium distribution of a unit charge  $\mu$  on a (compact) conductor  $E$  in the complex plane  $\mathbb{C}$ . In the absence of an external field, equilibrium will be reached when the total energy

$$I(\mu) = \iint \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(z) d\mu(\zeta), \quad \mu \text{ prob. meas. on } E$$

is minimal. There is a unique minimizing distribution  $\mu_E$ ; it is supported by the outer boundary of  $E$  and its potential

$$U^{\mu_E}(z) = \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta)$$

is essentially constant on  $E$ . The distribution  $\mu_E$  arises in a number of problems of classical analysis. For example,  $\mu_E$  gives information on the limiting zero distribution for important classes of orthogonal polynomials on  $E$ . The introduction of an *external field*  $Q(z)$  in the electrostatic problem gives a much wider scope to the



S. Kobayashi  
**Hyperbolic complex spaces**  
 Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.  
 471 p., prijs DM 168,-.  
 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 318).  
 ISBN 3-540-63534-3

Een Riemannoppervlak wordt elliptisch, parabolisch of hyperbolisch genoemd naargelang de universele overdekkingsruimte de Riemann-sfeer, het vlak  $\mathbb{C}$  of de eenheidsschijf  $D$  in  $\mathbb{C}$  is. Differentiaalmeetkundig betekent dit dat de kromming respectivelijk  $+1$ ,  $0$  of  $-1$  is voor de natuurlijke metriek. Het begrip hyperboliciteit, dat hier gedefinieerd is, kan op verschillende manieren uitgebreid worden naar hogere dimensies. De uitbreiding die we te danken hebben aan de auteur van dit boek is gebaseerd op het bestaan van een intrinsieke afstand die oorspronkelijk werd ingevoerd om het lemma van Schwarz te veralgemenen. Dit lemma betoogt dat elke holomorfe afbeelding van de schijf  $D$  in zichzelf contraheerend is ten opzichte van de Poincaré-afstand. In 1967 voerde S. Kobayashi een nieuwe pseudo-afstand in. Stel  $X$  een complexe variëteit en  $(p, q)$  twee punten gelegen in  $X$ . Neem vervolgens een keten van holomorfe schijven van  $p$  naar  $q$ , m.a.w. kies een rij

van punten  $(p_i)$ ,  $(i = 0, \dots, k)$ , in  $X$  zodat  $p = p_0$  en  $q = p_k$ , kies puntenparen  $(a_i, b_i)$ ,  $(i = 1, \dots, k)$ , in  $D$  in holomorfe afbeeldingen  $f_i$ ,  $(i = 1, \dots, k)$ , van  $D$  in  $X$  zodat  $p = f_1(a_1)$ ,  $q = f_k(b_k)$  en  $p_i = f_i(b_i) = f_{i+1}(a_{i+1})$  voor  $0 < i < k$ . De afstand wordt bepaald door  $d_X = \inf \sum_i d(a_i, b_i)$ , waarbij het infimum genomen wordt over alle mogelijke ketens die  $p$  met  $q$  op deze manier verbinden. Indien  $X$  een compact Riemann-oppervlak is met genus  $\leq 2$  dan valt  $d_X$  samen met de natuurlijke metriek met kromming  $-1$ . De auteur noemt een complexe ruimte hyperbolisch indien de pseudo afstand  $d_X$  een afstand is. Sinds de invoering van de pseudo-afstand door Kobayashi is er heel wat onderzoek verricht in dit domein. Mathematical Reviews besteedt hieraan twee secties, namelijk 'invariant metrics and pseudo distances' en 'hyperbolic complex spaces'. Interessant is het om het boek van S. Lang, *Introduction to complex hyperbolic spaces*, 1987, naast het hiervoor liggend boek te nemen om de geweldige vooruitgang te zien in dit domein.

Kobayashi geeft vrijwel alles van wat recentelijk verricht is aan onderzoek in dit domein. In hoofdstuk 1 bevindt zich alles wat men dient te weten over wat men afstands-meetkunde zou kunnen noemen. In hoofdstuk 2 wordt Ahlfors' veralgemening van het Schwarz-Pick lemma gegeven. Hoofdstuk 3 is zowat het hart van het boek. Het concept van hyperbolische inbedding is gebruikt om de grote Picard-stelling te veralgemenen. De auteur is een gereputeerd meetkundige en besteedt als dusdanig hier uitvoerig aandacht aan geometrische benaderingen. Het krachtigste criterium om hyperboliciteit te bewijzen is door gebruik te maken het criterium van Brody. Een complexe variëteit,  $X$ , wordt Brody-hyperbolisch genoemd indien er geen niet-constante holomorfe afbeeldingen bestaan van  $\mathbb{C}$  in  $X$ . Hieruit volgt onmiddellijk dat elke hyperbolische complexe ruimte Brody-hyperbolisch is. De stelling van Brody zegt dan dat elke compacte hyperbolische complexe ruimte Brody-hyperbolisch is. Het criterium van Brody gecombineerd met de Nevanlinna-Cartantheorie van 'value-distributions' lijkt de beste benadering te zijn in dit domein. Het gedeelte van de Nevanlinna-Cartantheorie nodig voor het hyperboliciteitscriterium is samengevat in een zeer leesbaar appendix. De hieropvolgende hoofdstukken behandelen holomorfe afbeeldingen in hyperbolische ruimten, extensies en eindigheidsstellingen, maat-hyperbolische ruimten van algemeen type en waarde-distributies. Het boek bevat een zeer uitvoerige bibliografie en is derhalve zowel een goede en aangenaam leesbare inleiding in dit zeer uitgebreid onderzoeksdomein als een standaard werk bestemd voor onderzoekers die een up to date overzicht krijgen in het huidige lopende onderzoek.

P. Dehooghe

R. W. Easton

### Geometric methods for discrete dynamical systems

Oxford: Oxford University Press, 1998. 158 p., prijs £50,-  
Oxford Engineering Science Series; 50. ISBN 0-19-508545-0

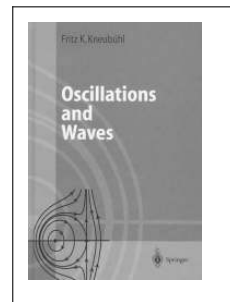
There are now quit a number of books on dynamical systems and any author should worry about the question which niche to fill. In the case of this book it is quite clear: a concise and rigorous introduction to the theory, plunging right into the basic abstract concepts. The prerequisites are linear algebra and functions of several variables and the audience is meant to be students of engineering, science and mathematics, or so the author tells us. This

is far too optimistic, the book is accessible for high-level mathematics students with an advanced background in analysis and some related subjects. There are examples and a lucid treatment of qualitative ideas but no applications or extensive discussion of quantitative methods.

The contents: The first chapter has many examples, very briefly discussed. Chapter 2 contains basic concepts like invariant set, attraction (introduced rather counter-intuitively) and questions like partitioning or orbit spaces into classes or orbit spaces into classes with the Conley decomposition theorem. Chapter 3 describes hyperbolicity with the stable-unstable manifold theorem, shadowing, the horseshoe map, resonance zones. In chapter 4 isolated invariant sets are discussed which touches upon bifurcation theory, in chapter 5 the author studies the Convey index, in chapter 6 symplectic maps as arising from discrete variational principles including a one and a half page discussion of symplectic integrators (engineers will like a reduction to their main interest to this size!). A number of appendices and various guides to the literature complete the text. There are a few typos and errors but not too disturbing. As I noted earlier, this book does not reach intended audience and it presupposes much more than the author mentions in the introduction.

But do get me wrong: this is a very fine book, clearly written with a lot of basic subjects thoroughly discussed. What I am missing most is an extensive treatment of bifurcation theory but I admit there are quite a few books on that topic. The book is useful as background material for all of us and it is very suitable for a seminar on dynamical systems theory with a lot of details to be worked out by the participants under guidance of an expert.

F. Verhulst



F.K. Kneubühl

### Oscillations and waves

Berlin: Springer-Verlag, 1997.

523 p., prijs DM 98,- (hc).

ISBN 3-540-62001-X

De fysicus Kneubühl heeft met een boek een gedegen samenvatting gegeven van het brede vakgebied van lineaire en niet-lineaire trillingen. Om een indruk te geven van de onderwerpen die door dit boek worden bestreken, noem ik kort de titels van de hoofdstukken: 'Free oscillations', 'Forced oscillations', 'Kinematics of systems', 'Transfer systems', 'Instability and chaos', 'Linear waves', 'Nonlinear waves' and 'Standing waves'. Het boek beoogt een samenvattende inleiding te geven van de verschillende mathematische aspecten van trillingen en golven gericht op gebruik door fysici en ingenieurs. Dat betekent dat de auteur nergens diep op in kan gaan, maar hij geeft wel steeds een begrijpelijke schets van het betreffende onderwerp plus een aantal relevante literatuurverwijzingen. Door het brede karakter van het boek is het een fraai encyclopedisch overzicht geworden van dit vakgebied. Het is natuurlijk niet bestemd voor specialisten (het hoofdstuk over chaotische gedrag bijvoorbeeld is slechts 30 pagina's groot), maar zij kunnen wel snel geïnformeerd worden over andere dan hun ei-

gen kennisgebieden. Zo verwacht ik dat dit boek zeer geschikt zal zijn om te dienen als bronmateriaal voor een inleidend maar ook een meer dieper gravend college (er is bijvoorbeeld een volledige classificatie van twee-dimensionale kwadratische autonome systemen opgenomen). Als recensent ga je in zo'n boek al gauw zoeken of de auteur jouw eigen favoriete onderwerpen en referenties vermeldt, en dan blijkt dat dit boek natuurlijk niet echt alles geeft. Dat kan natuurlijk ook niet in zo'n 500 pagina's, maar niettemin levert het boek een schat aan gecondenseerde fraaie informatie. Zo trof ik een aantal expliciete analytische oplossingen aan voor niet-lineaire problemen (bijvoorbeeld de elliptische excitatie van de inhomogene Duffingvergelijking in hoofdstuk 3.4.2 en nuttige informatie over niet-lineaire golven zonder en met diffusie in de hoofdstuk 8.2 en 8.3). In het uitgebreide overzicht 'Modulated linear oscillators' is het vakgebied van de auteur (infraroodfysica) prominent aanwezig.

E.J.M. Veling



A. Pankov

**G-Convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators**

Dordrecht: Kluwer, 1997.

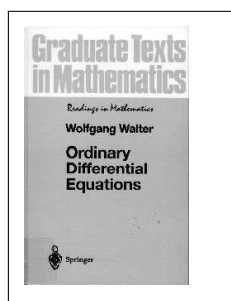
249 p., prijs f210,-

(Mathematics and its applications; 422).

ISBN 0-7923-4720-X

This book has been written for specialists in the field of homogenization (or averaging) techniques for nonlinear elliptic or parabolic operators. The author introduces in chapter 1 the concept of G-convergence for some abstract operators. Special attention is paid to monotone operators and parabolic operators. In chapter 2 strong G-convergence for nonlinear elliptic operators is considered in detail. Homogenization problems for random, homogeneous elliptic operators, and for (almost) periodic elliptic operators are studied thoroughly in chapter 3. In chapter 4 the strong G-convergence and homogenization problems for nonlinear parabolic operators are considered. The same problems for nonlinear difference operators are discussed shortly in appendix A. A list of eighteen interesting open problems is given in appendix B. An index and an up-to-date bibliography with 269 references conclude this book.

W.T. van Horssen



W. Walter

**Ordinary differential equations**

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

380 p., prijs DM 98,-

(Graduate texts in mathematics; 182).

ISBN 0-387-98459-3

Ter bespreking ligt een nieuwe versie van een leerboek over gewone differentiaalvergelijkingen van Wolfgang Walter: qua inhoud grotendeels de 6de druk van *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, nu uitgebreid en in het Engels vertaald door Russell Thompson. Ter zijde: De eerste druk van de Duitstalige versie – toen nog een handzaam 'Heidelberger Taschenbuch' – is van 1972.

De gepresenteerde stof biedt wellicht weinig verrassingen. Een degelijke behandeling van gewone differentiaalvergelijkingen wordt gegeven; de gekozen voorbeelden spreken mij erg aan. Bij vergelijking van vorige uitgaven (in het Duits) met het voorliggende Engelstalige boek viel mij onder meer op dat in hoofdstuk II bij het construeren van boven- en onder-grenzen voor oplossingen van een DV via differentiaalONgelijkheden nu ook het begrip separatrix wordt behandeld. Het aldus traceren van mogelijke separatrices is nieuw: ik vind de introductie zowel nuttig als origineel. Opmerkelijk is nog de mijns inziens wat kunstmatige introductie van een 'nieuw' woord: *ansatz* dat in het boek herhaaldelijk wordt gebruikt (volgens een voetnoot in de inleiding bestond nog geen geschikt woord in de Engelse taal om aan te geven dat een kandidaat-oplossing voor een DV wordt getest). Ik heb nauwelijks drukfouten in de text aangetroffen. Het boek staat, met de appendices, geheel op zichzelf. Het bevat vele opgaven met soms aanwijzingen. Gezien de didactisch verantwoorde opbouw is dit boek van harte aan te bevelen als leerboek.

W.A.K. Maas

D. Przeworska – Rolewicz

**Logarithms and antilogarithms. An algebraic analysis approach**

Dordrecht: Kluwer, 1998. 348 p., prijs f295,-

(Mathematics and its applications). ISBN 0-7923-4974-1

Een groot deel van de resultaten uit de calculus kan afgeleid worden uit eigenschappen van de differentiatie-operator. In de zogenaamde algebraïsche analyse wordt dit veralgemeend door in plaats van de differentiatie-operator een willekeurige rechts-inverteerbare operator werkend op een lineaire ruimte te beschouwen en daar analoge resultaten voor af te leiden. Hierbij is het niet nodig het bestaan van een convolutieproduct aan te nemen zoals bijvoorbeeld in de Mikusinski-calculus. Het onderhavige boek zet een theorie op van logaritmen gebaseerd op een rechts-inverteerbare operator in een Banachruimte. Logaritmen worden dan gedefinieerd als multifuncties die aan een vergelijking voldoen die de gewone logaritmische afgeleide imiteert. De auteur heeft in dit boek ongetwijfeld een goede setting gevonden voor een abstracte behandeling van logaritmen.

Helaas is het boek zo geschreven dat het niet prettig leest. Er is een overvloed aan resultaten, die gewoonlijk kort bewezen kunnen worden, maar veel notatie vereisen. Jammer genoeg zijn expliciete voorbeelden schaars. Verder ontbreekt een overzicht van hoogtepunten en is het Engels nogal houderig. Gezien de prijs van dit boek is het onbegrijpelijk dat de uitgever niet de moeite heeft genomen de tekst te laten bijschaven. Het boek bevat ook een appendix van ruim 60 bladzijden geschreven door Binderman, een voormalig student van de auteur. Deze appendix bevat werk van Binderman betreffende zogenaamde functionele translatie-operatoren. Hoewel dit onderwerp ook abstract van aard is, bevat de appendix een redelijk aantal expliciete toepas-

singen, meestal veralgemeningen van de formules van Taylor. Het boek bevat een redelijk aantal referenties. Helaas wordt er in de tekst nauwelijks verwezen naar referenties met betrekking tot andere abstracte operatormethoden. Zo zijn er bijvoorbeeld wel referenties naar artikelen over de umbrale calculus van Rota, maar deze artikelen worden in de tekst jammer genoeg niet genoemd. Dit is merkwaardig, aangezien er duidelijke aanknopingspunten zijn (en zelfs gedeeltelijk overlapt met het werk van Binderman). Immers, de umbrale calculus kan gezien worden als een theorie van Taylorontwikkelingen met veel expliciete voorbeelden. Gezien het bovenstaande kan ik dit boek alleen aanbevelen aan diegenen die sterk geïnteresseerd zijn in abstracte operatormethoden.

A. Di Bucchianico

W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner

**Constructive approximation on the sphere, with applications to geomathematics**

Oxford: Clarendon Press, 1998. 427 p., prijs £65

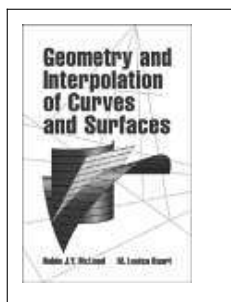
(Numerical mathematics and scientific computation). ISBN 0-19-853682-8

De serie 'Numerical mathematics and scientific computation'-serie begint wat mij betreft een uitstekende naam te krijgen voor naslagwerken. In de aankondiging wordt het boek aanbevolen aan studenten in het laatste deel van hun studie, waarbij elementaire lineaire algebra, functionaalanalyse en numerieke wiskunde als bekend verondersteld worden. Dat laatste klopt, maar de eerste doelstelling is, denk ik, lichtelijk hooggegrepen (de doelgroepstudenten zijn geofysici en geo-engineers, maar het lijkt me voor studenten in vrijwel *elke* afstudeerrichting nogal zware kost). Er zijn voldoende boeken op het gebied van speciale functies (en dus ook over sferische harmonische functies) en er zijn ook veel boeken op het gebied van constructieve approximatie – die laatste boeken handelen echter bijna alle over benaderingsmethoden voor functies gedefinieerd op (een deel van) Euclidische ruimten. Daarom levert deze verhandeling een zinnige bijdrage aan de wetenschap: naast de gebruikelijke en al genoemde sferische harmonische functies, is er ook aandacht voor sferische splines (ik mis daar echter de naam van Schumaker), er is een leuk hoofdstuk over numerieke integratie op de bol, en voorts worden wavelets zeer uitvoerig beschreven. Kortom een goed boek, dat ook prettig leest, maar zeker gezien de doelgroep nogal zwaar aangezet. Ik zou de toevoeging aan de titel 'with applications to Geomathematics' weggelaten hebben, want daar heb ik niets van terug kunnen vinden. Zuivere wiskunde, in die categorie valt dit boek.

R. van Damme

tion and approximation problems. Their approach is intuitive and step by step: problems to be dealt with are motivated and introduced, a large number of worked examples is presented and then the associated body of theoretical results is developed, often again illustrated by examples. Geometry is the unifying theme. Furthermore, emphasis is clearly on one-dimensional interpolation methods; only the final chapter deals with local interpolation in two dimensions in some detail. We proceed by giving a short sketch of the contents of the various chapters. In chapter 1 simple polynomial (Lagrange as well as Hermite) and rational interpolation problems are discussed. Various kinds of cubic splines are also dealt with. The aspect of unisolvence is treated and within this context Haar's theorem is proved, this being the main theoretical result of chapter 1. A sizable part of the book is spent on conic sections, this because of their importance in engineering drawing and in the finite element method. Through examples, specific properties of these curves are treated, e.g. conics through a given number of points, the conic touching five lines, conics with specified curvature, osculating conics, et cetera. Since in most applications these curves are defined piecewise, piecewise conics with various degrees of continuity are also briefly discussed. The text continues with a short introduction to synthetic geometry. This approach, as opposed to the analytical one, directly discusses the geometrical entities involved, viz. lines, planes, spheres, curves and so on (whereas in the analytical way these entities are expressed by equations, and their properties derived by the use of algebra and analysis). As an example of synthetic reasoning, a proof of a special case of the well-known Desargues theorem is given. Algebraic projective geometry is the subject of chapter 4. The authors begin with introducing homogeneous coordinates for the real projective plane, because these enable one to use algebraic methods to study algebraic curves in the sequel of the book. A proof is given of the so-called fundamental theorem of projective geometry. The remainder of the chapter is devoted to a discussion of some particular projective transformations, i.e. central projections, affine projections, similarity and Euclidean transformations.

Algebraic curves are the topic of chapter 5. Based on the material of the preceding chapter, general properties of these curves are studied as well as particular properties of curves allowing a rational parametrization. It is pointed out how the multiplicity of curve intersections should be counted and how to handle singularities of curves using specific transformations. This general characterization should suffice. However, to lend a bit of colour to the description of this chapter, the following three observations are added: (1) in dealing with curve intersections, one encounters non-linear equations; a technique known as dialytic elimination, due to Sylvester (1814 - 1897), to solve such equations is sketched; (2) a proof of the Maclaurin - Bézout theorem is given. This theorem, fundamental for the study of algebraic curves, reads as follows: two plane algebraic curves of precise orders  $m$  and  $n$  respectively, and having no common nonconstant component, have  $mn$  intersections; (3) Colin Maclaurin (1698 - 1746), of whom the authors remark (cf. page 217-218): "He entered Glasgow University at the tender age of eleven and graduated in 1714, aged sixteen. Although he is most often remembered because of the series which bears his name, most of his work has a strong geometrical flavour. At the age of twenty-one he became a Fellow of the Royal Society, and the following year published his Geometria



R.J.Y. McLeod, M.L. Baart

**Geometry and interpolation of curves and surfaces**

Cambridge: Cambridge University Press,

1998. 414 p., prijs £50,-.

ISBN 0-521-32153-0

The authors describe, with applications and practical problems in mind, the role of algebraic curves and surfaces in interpola-

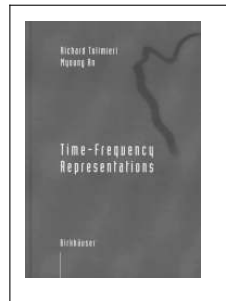
Organica, which extended Newton's geometrical studies."

Chapter 6 deals with examples and applications. Among other things, different ways of constructing parametrizations of curves with zero deficiency are considered. Furthermore, a number of interpolation and approximation methods based upon the parabola are treated, leading to a general discussion of the closeness of curves as a geometrical property (the Hausdorff distance metric comes to mind). Finally, brief attention is given to the role of geometrical interpolation, in the derivation of difference methods for the solution of differential equations. Interpolation with surfaces is dealt with in chapter 7. The basic theory as developed in the preceding chapters is applied to the construction of finite element basis functions and surface interpolants over nonregular shapes. Moreover, the so-called Steiner surface, the cubic surface (a proof is given that there are twenty-seven lines upon its surface) and the quartic surface are briefly discussed. I conclude with a few general remarks. At the end of each chapter a number of exercises (forty on average) are included. The exercises are preceded by a short section entitled 'bibliographical notes' in which a few references on the subjects dealt with are given; no separate list of references is included at the end of the book. What is striking here is that, apart from a tiny few, all these citations refer to literature published before 1980, i.e. (almost) no references to recently appeared books and papers on interpolation and approximation methods are included, a part of analysis which clearly is very much alive nowadays. In view of this observation and taking into account the nature of the problems dealt with in the book, one is tempted to conclude that the text of McLeod and Baart is somewhat beside the mainstream of the subject of interpolation and approximation. However, a positive feature of the book definitively is that it contains so many examples; as such, it is very well suited for self-tuition.

F. Schurer

and  $W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R})$ , where  $\omega_\alpha = t^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). It would lead too far afield to try to describe in more detail the nature of the results arrived at in the book. Instead, we restrict ourselves to a few general remarks. The introductory section is very well documented and sketches the historical framework of the monograph's content. It gives an impressive account of what has been accomplished thus far in this area of analysis and surely wets the appetite for the author's subject. All chapters are carefully written and, clearly, great attention has been given to a precise formulation of the concepts, the definitions and the (proofs of the) theorems, most of them being of a highly technical character. The bibliography is up-to-date and contains ninety-three well-chosen references, eight of which are due to the author. The subject index is rather meagre. Bagdasarov's monograph, excellently produced by Birkhäuser, is a welcome addition to the literature and can be warmly recommended to specialists in theoretical approximation theory.

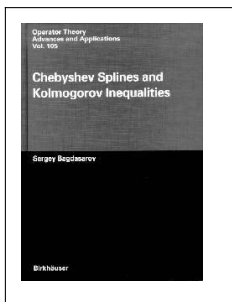
F. Schurer



R. Tolimieri, M. An  
**Time-frequency representations**  
 Boston: Birkhäuser, 1998.  
 284 p., prijs DM 138,-  
 (Applied and numerical harmonic analysis).  
 ISBN 0-8176-3918-7

Dit boek is verschenen in de reeks toegepaste en numerieke harmonische analyse, en het behandelt signalen als functies op een eindige abelse groep. De tijd wordt gelabeld door een eindige abelse groep  $A$  en de frequentie door  $A^*$ , de groep van (unitaire) karakters van  $A$ . Het boek valt uiteen in vier delen. In het eerste deel, hoofdstukken 1-4, wordt de benodigde voorkennis over eindige groepen gegeven. In het bijzonder worden de discrete Fouriertransformatie en de Poissonsommatieformule besproken. Het tweede deel, hoofdstukken 5-15, vormt de hoofdmoot van het boek en hierin wordt de discrete versie van de 'windowed' Fouriertransformatie besproken. In het derde deel, hoofdstuk 16 en 17, worden 'multirate' filters behandeld. Het laatste deel is hoofdstuk 18 over toepassingen op tijdreeksen van financiële markten. Dit hoofdstuk is geschreven door S. Adak en A. Sarkar.

In de hoofdmoot worden de Weyl-Heisenbergssystemen bestudeerd als analogon van de 'windowed' Fouriertransformatie. De invoer bestaat uit een vensterfunctie  $g$  op  $A$  en een ondergroep  $\Delta$  van  $A \times A^*$ . Voor een element  $x = (x, x^*) \in \Delta$  wordt de getransleerde functie  $g_x$  op  $A$  gedefinieerd als  $g_x(a) = g(a - x)x^*(a)$ . De ruimte  $L(g, \Delta)$  opgespannen door alle getransleerde vensterfuncties  $g_x$  met  $x \in \Delta$  is het onderwerp van studie. De volgende vragen worden onder andere beantwoord; wat is een karakterisatie van  $L(g, \Delta)$ , wanneer vormen de getransleerde functies een orthonormale basis voor  $L(g, \Delta)$  of een 'tight frame' zoals in de theorie van wavelets. In eerste instantie worden deze vragen beantwoord voor  $\Delta = B \times B_*$ , een kritieke 'sampling' ondergroep, met  $B$  een ondergroep van  $A$  en  $B_* \subset A^*$  de ondergroep van alle karakters van  $A$  die triviaal zijn op  $B$ . Vervolgens worden de 'oversampling' ondergroepen, d.w.z. dat  $\Delta$  een kritieke sam-



S. Bagdasarov  
**Chebyshev splines and Kolmogorov inequalities**  
 Birkhäuser Verlag, 1998. 205 p., prijs DM 178,- (Operator theory: advances and applications; 105). ISBN 0-8176-5984-6; ISBN 3-7643-5984-6

This monograph, consisting of a preface, an introductory section, seventeen chapters, two appendices, a bibliography and a subject index, describes advances in the theory of extremal problems in classes of functions defined by a majorizing concave modulus of continuity  $\omega := \omega(t)$ . According to the preface, the three main goals pursued in the book are: (1) to introduce the notion of and give the formulae for the perfect  $\omega$ -splines in the Sobolev classes  $W^r H^\omega$ ; (2) to describe various extremal properties of perfect  $\omega$ -splines by emphasizing the new phenomena and the old features inherited from polynomial perfect splines; and (3) to show applications of the general theory of perfect splines in examples related to the computation of  $N$ -widths of classes  $W^r H^\omega$  and the author's solution to one of the most celebrated problems in real analysis: the Kolmogorov problem of sharp inequalities for intermediate derivatives in the so-called Hölder classes  $W^r H^{\omega_\alpha}(\mathbb{R}_+)$



pling ondergroep bevat, behandeld door middel van een verdeel-en-heersalgoritme waarmee reductie naar het kritieke geval kan worden verkregen. Een essentieel onderdeel hierin is de Zaktransformatie, de discrete-Fouriertransformatie over een ondergroep van de getransleerde functie. Het is onduidelijk of dit boek bedoeld is voor wiskundigen met belangstelling voor signaalanalyse of voor signaalanalysten met belangstelling voor wiskunde. De wiskunde wordt in een voetgangerstempo ontwikkeld. Voor een introductie van de Fouriertransformatie op eindige groepen en haar toepassingen kan men beter het recente boek *Fourier analysis on finite groups and applications* van Audrey Terras (London Math. Soc. Student Texts 43, Cambridge Univ. Press, 1999) raadplegen. Het is onhandig dat het boek geen index van notatie heeft, terwijl de hoofdstukken beginnen met de mededeling dat de notatie is als in de voorgaande hoofdstukken. Omdat elke formule als 'Theorem' wordt gepresenteerd, is het moeilijker het kaf van het koren te scheiden. De redenen voor het opnemen van het laatste hoofdstuk zijn volstrekt onduidelijk.

H.T. Koelink

D. O'Regan, M. Meehan

### Existence theory for nonlinear integral and integrodifferential equations

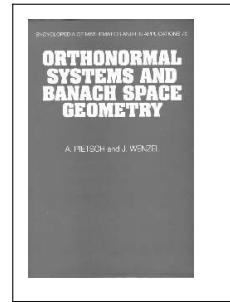
Dordrecht: Kluwer, 1998. 218 p., prijs f190,-  
(Mathematics and its applications; 445). ISBN 0-7923-5089-8

Dit boek is een neerslag van de specifieke belangstelling van de auteurs. Hierbij is geen rekening gehouden met lezers uit andere (wiskundige en niet-wiskundige) disciplines. Het komt op mij over als een uitgebreid proefschrift. Met andere woorden, het is geschreven voor een kleine groep specialisten. Het eerste deel van het boek houdt zich bezig met existentieprincipes en resultaten voor niet-lineaire, Fredholm- en Volterra- integraal- en integrodifferentiaalvergelijkingen op compacte en half-open intervallen. Zo worden bijvoorbeeld in hoofdstuk 5 existentieprincipes voor de Fredholmintegraalvergelijking

$$y(t) = h(t) + \mu \int_0^\infty k(t,s)g(s,y(s)) ds, \quad t \in [0, \infty),$$

waarbij  $\mu \geq 0$ , en de niet-lineariteit  $g$  sub-lineaire of superlineaire groei heeft, behandeld en worden er condities gegeven voor de oplossingen  $y \in C[0, \infty)$ , waarvoor  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  bestaat. Daarna wordt aandacht besteed aan de Voltteravergelijking waarbij de bovengrens van de integraal  $t \in [0, T)$  met  $0 \leq T \leq \infty$  is, tevens wordt aandacht besteed aan het geval  $\mu = -1$ . In het tweede deel komt een aantal onderwerpen aan de orde, waar de auteurs speciale belangstelling voor hebben, zoals niet-resonante en resonante problemen, vergelijkingen in Banach-ruimten, inclusies en stochastische vergelijkingen. Zoals gezegd een boek voor specialisten. Men kan zich afvragen waar het woord *applications* in de naam van de serie op slaat. In dit boek vindt men in ieder geval geen antwoord op deze vraag.

A. J. Hermans



A. Pietsch, J. Wenzel

### Orthonormal systems and Banach space geometry

Cambridge: Cambridge University Press, 1998.  
553 p., prijs £55,- (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). ISBN 0-521-62462-2

This book essentially deals with providing tools to classify Banach spaces, these tools being ideal norms associated with orthonormal systems. The (abstract) framework is set up in chapter 3: Let  $T : X \rightarrow Y$  be a continuous linear operator,  $X$  and  $Y$  being Banach spaces and let for  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  and  $B_n$  be orthonormal systems (of length  $n$ ) in  $L_2(M, \mu) \cap L_u(M, \mu)$  and  $L_2(N, \nu) \cap L_v(N, \nu)$  with  $1 \leq u, v < +\infty$ . Then the associated Riemann-ideal norm  $\rho_u^{(v)}(T|B_n, A_n)$  and Dirichlet-ideal norm  $\delta_u^{(v)}(T|B_n, A_n)$  of  $T$  are considered. Special attention is paid to orthonormal systems obtained as characters on compact Abelian groups, such as the Fourier and Walsh systems. Substituting the sequences  $A_n$  and  $B_n$  by appropriate orthonormal systems then gives rise to sequences of numerical parameters which yield much insight into a lot of concepts from Banach space theory introduced in the last decades such as type and co-type of Banach spaces,  $B$ -convexity, super-reflexivity, et cetera. This basic philosophy is worked out successively in the case of Rademacher functions and the Gauss system (chapter 4), trigonometric functions (chapter 5), Walsh functions (chapter 6) and the Haar functions (chapter 7).

Comparison of the sequences of ideal norms thus constructed – in the sense of uniform equivalence – is one of the main features dealt with. Deep theorems from Banach space geometry are thus derived such as Kwapién's theorem (4.10.7), Pisier's theorem (4.14.10), the Maurey-Pisier theorem (4.16.5), Bourgain's theorem (5.6.29), James's theorem (7.8.12). Chapter 2 goes back to the origins of the theory, namely the isomorphic characterization of Hilbertian Banach spaces by S. Kwapién in 1972. Notice also that in section 5.4 and 5.8 respectively, the problem is discussed of defining vector-valued analogues of the Hilbert and Fourier transforms, leading to some important Banach ideals. The book ends up with ideal norms related to concepts like unconditionality (chapter 8), interpolation, ... (chapter 9). Among others, the Burkholder-Bourgain theorem is stated (without proof) (8.8.1) and a selection is given of open problems concerning ideal norms associated with orthogonal polynomials. The latter illustrates extremely well one of the main objectives of the book: to get young researchers interested in this exciting field. The authors have done an enormous effort to achieve this goal: each notion – classical or not – is introduced carefully; combinatorial results from real analysis are worked out in full detail; a lot of examples and counterexamples – mostly put into table form – illustrate the limits of the techniques used; many open problems are formulated. This is a beautiful book, not only covering the highlights of Banach space geometry, but also appealing young enthusiasts to enter this field and for whom it will provide an excellent preparation.

R. Delanghe

J. Jost, X. Li-Jost

### Calculus of variations

Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 323 p. prijs £37,50  
(Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 64).

ISBN 0-521-64203-5

In hun voorwoord zeggen de auteurs dat zij trachten enkele van de vele aspecten van variatierekening te laten zien. Dat is ook wat er gebeurt. Dezelfde titel laat bij andere auteurs (cf. Giaquinta-Hildebrandt) andere aspecten aan de orde komen. Waar Giaquinta en Hildebrandt de klassieke variatierekening beschrijven ligt het zwaartepunt bij Jost en Li-Jost in de moderne theorie. Het boek bevat de delen *One-dimensional variational problems* en *Multiple integrals in the calculus of variations*.

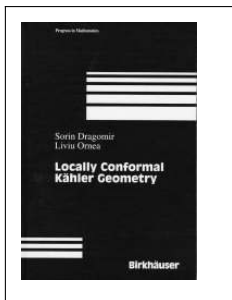
De keuze van de auteurs voor de behandelde onderwerpen is zeer persoonlijk en hangt voor een deel nauw samen met hun recente onderzoek. Daarnaast worden een aantal klassiek te noemen resultaten behandeld en is ook de voorbereiding en behandeling van de 'direct methods' zeer volledig, zij het bondig. Ondanks dit hinken op twee benen is het boek, mede door zijn zorgvuldige en heldere stijl, zeker de moeite waard. Als hernieuwde kennismaking met de (moderne) variatierekening kan ik het zeer aanbevelen.

G.H. Sweers

van l.c.K.-ruimten bestudeerd. In het laatste hoofdstuk van dit deel wordt aangetoond hoe bepaalde technieken uit de studie van l.c.K.-ruimten ook kunnen worden aangewend voor het bestuderen van *lokaal conforme hyperKähler-ruimten*.

Het tweede deel van de tekst is gewijd aan de studie van deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten. In een eerste hoofdstuk worden CR-deelruimten behandeld, en wordt aandacht besteed aan complexe, anti-invariante en ombilicale deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten. Daarna wordt een studie gemaakt van extrinsieke sferen in veralgemeende Hopf-ruimten, en van reële hyperoppervlakken in l.c.K.-ruimten, en in het bijzonder in complexe Hopf-ruimten. Vervolgens wordt de meetkunde van complexe deelvariëteiten van l.c.K.-ruimten behandeld. Gebruik makend van integraalformules wordt verder een classificatie gemaakt van een belangrijke klasse van compacte, minimale CR-deelruimten in een complexe Hopf-ruimte. Tenslotte worden in een laatste hoofdstuk ondermeer de stabiliteit van complexe deelruimten van veralgemeende Hopf-ruimten, Chen klassen en geodetische symmetrieën ten opzichte van deelruimten in l.c.K.-ruimten besproken. Appendices over de Boothby-Wang-fibratie en over Riemannse submersies en een zeer uitgebreide literatuurlijst sluiten het boek af. De auteurs zijn erin geslaagd de vele resultaten in verband met l.c.K.-ruimten, die tot nu toe enkel verspreid in de literatuur van de laatste twee decennia konden worden gevonden, samen te brengen in een gestructureerd en overzichtelijk geheel, wat dit boek tot een waardevol naslagwerk maakt voor iedereen die geïnteresseerd is in de studie van lokaal conforme Kähler-ruimten.

P. Bueken



S. Dragomir, L. Ornea  
**Locally conformal Kähler geometry**

Boston: Birkhäuser Verlag, 1998.

327 p., prijs DM 178,-

(Progress in Mathematics; 155).

ISBN 3-7643-4020-7

*Lokaal conforme Kähler variëteiten* (l.c.K. ruimten) zijn Hermite-ruimten  $(M, g, J)$  waarvan de Hermite metriek  $g$  in de omgeving van elk punt conform is met een (lokale) Kählermetriek. De l.c.K.-ruimten vormen een interessante veralgemening van de Kähler-ruimten, die de belangrijkste studieobjecten uit de hedendaagse complexe meetkunde zijn. Het blijkt namelijk dat een aantal meetkundig interessante complexe ruimten (zoals de complexe Hopf-ruimten), waarop geen Kählermetrieken kunnen worden geconstrueerd, wel l.c.K.-metrieken toelaten. Dit boek geeft, op zeer systematische en gedetailleerde wijze, een overzicht van een groot aantal resultaten uit de studie van l.c.K.-ruimten. In een eerste deel van het boek wordt de differentiaalmeetkunde van l.c.K.-ruimten bestudeerd. Hierbij wordt ondermeer nagegaan onder welke voorwaarden een l.c.K.-ruimte ook een (globaal gedefiniëerde) Kählermetriek toelaat. In het bijzonder worden hierbij de *Vaisman-vermoedens* behandeld. Verder worden interessante voorbeelden van l.c.K.-ruimten beschreven waarop geen globale Kählermetriek kan worden geconstrueerd. Vervolgens wordt speciale aandacht besteed aan de meetkundige studie van een bijzondere familie van l.c.K.-ruimten, de zogenaamde *veralgemeende Hopf-ruimten* of *Vaisman-ruimten*, dit zijn l.c.K.-ruimten met een parallele Leeform. Daarna wordt een studie gemaakt van Hermite-oppervlakken die een l.c.K.-structuur bezitten, en worden holomorfe afbeeldingen tussen l.c.K.-ruimten en submersies

M. Crabb, I. James

### Fibrewise homotopy theory

London, etc.: Springer-Verlag, 1998. 341 p., prijs DM 159,-

(Springer monographs in mathematics). ISBN 1-85233-014-7

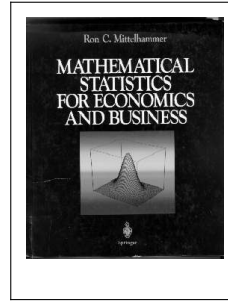
Voor een drietal topologische ruimten  $X, Y, B$  met vaste continue afbeeldingen  $p : X \rightarrow B, q : Y \rightarrow B$  wil men de continue afbeeldingen  $f : X \rightarrow Y$  bestuderen die compatibel zijn met  $p$  en  $q$ , d.w.z. waarvoor geldt  $q \circ f = p$ . De echte interesse ligt in homotopieën en homotopieklassen die de compatibiliteit respecteren. Zulks is vaak aan de orde in de theorie van de vezelbundels, waarbij  $p$  en  $q$  vezelbundels zijn. Die situatie is in zekere zin simpeler omdat alle vezels van  $p$  onderling homeomorf zijn. Dit geldt ook voor alle vezels van  $q$ . Is  $V$  de vezel van  $p$  en  $W$  de vezel van  $q$  boven hetzelfde punt van  $B$ , dan ligt het voor de hand om een zekere correspondentie te verwachten tussen 'bundelafbeeldingen'  $f$  zoals boven beschreven en afbeeldingen van  $V$  naar  $W$ .

Het onderhavige boek poogt een overzicht te geven van de huidige stand van zaken in de algemene situatie zoals beschreven in de eerste zin. Het onderwerp is sinds ongeveer 30 jaar in ontwikkeling. James is een van de scheppers ervan, en levert nog steeds bijdragen aan de literatuur erover. In 1989 publiceerde hij reeds een boek over dit onderwerp: I.M. James, **Fibrewise topology**. Cambridge University Press, 1989. Besproken in *Med.Wisk.Gen.* **34**(1991)#4, p.173-174. Daarin speelde de theorie van de fibrewise vezelbundels een ondergeschikte rol. Helaas is het boek in onze bibliotheek vermist, dus kan ik geen gedetailleerde vergelijking maken. Daarentegen gaat het grootste deel (deel II, bijna 200 pagina's) van het nu besproken boek over de fibrewise stable homotopy theory, met sterke connecties naar de

topologische  $K$ -theorie. Dit deel is opgezet als ware het een apart boek. Definities, stellingen, et cetera beginnen weer te tellen vanaf 1.1 en terugverwijzingen zijn altijd binnen dit deel, tenzij (spaarzaam) apart wordt vermeld dat het deel I betreft. Deel II is volgens de aparte introductie bedoeld als inleiding en heeft niet de pretentie om de huidige stand van zaken weer te geven. In tegenstelling met deel I wordt in deel II steeds verondersteld dat de basisruimte  $B$  een ENR (Euclidean Neighbourhood Retract) is. Daardoor zijn veel resultaten uit deel I te verfijnen, wat in de eerste paragrafen van deel II dan ook gebeurt. Mede daardoor is deel II inderdaad tamelijk onafhankelijk van deel I.

De tekst op de achterkant van het boek generaliseert een gedeelte van het voorwoord, en vermeldt: "In this monograph, fibrewise homotopy theory is developed ab initio, assuming only a basic knowledge of ordinary homotopy theory." In hun voorwoord voegen de auteurs er wijselijk aan toe: "at least in the early sections". Ik moet zeggen dat het bekijken van dit boek voor mij toch wel erg werd vergemakkelijkt omdat ik er destijds zelf enige research in gedaan heb. Overigens heette het vak toen nog *Ex-homotopy theory*. De schrijvers handhaven een tamelijk hoog niveau en zijn niet bijzonder scheutig met verduidelijkende voorbeelden. In het voorwoord staat: "The second part is concerned with the stable theory; the emphasis is on theory appropriate for geometric applications, and it is hoped that the account will be accessible to readers who may not already be experts in the classical stable theory." Uw reviewer heeft toch grote aarzeling om het boek geschikt te verklaren voor beginners in dit vak. Daarentegen zal het voor gevorderden zeker onmisbaar zijn als ze er verder onderzoek in willen doen.

P.W.H. Lemmens



R.C. Mittelhammer  
**Mathematical statistics for economics and business**

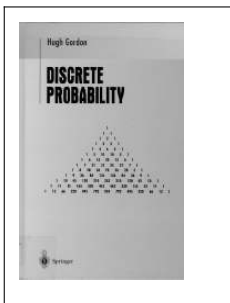
New York, etc.: Springer-Verlag 1996.

723 p., prijs DM 78,-.

ISBN 0-387-94587-3

In the preface of the book we read: "This book is designed to provide beginning graduate students and advanced undergraduates with a rigorous and accessible foundation in the principles of probability and mathematical statistics underlying statistical inference in the fields of business and economics." More shortly, the book is meant for econometrics students and should provide the necessary background for more advanced econometric theory and methods. Indeed the book is written for students in econometrics. Most texts on mathematical statistics lack a thorough treatment of topics that are important to econometric theory. On the other hand, the text is also very suitable for students in mathematical statistics, because various classical issues in the area of mathematical statistics are treated. The book is a sort of compromise and in the opinion of the reviewer the author should be complimented with his unique approach. The book is very rich with regard to the topics that are treated and the rigorous way this is done. Since the book is also a compromise all kinds of topics are not included. Of course the author had to make his choices, otherwise the book would have been twice as large.

Chapter 1 is about elementary probability theory. The author avoids the use of measure theory. Chapter 2 treats random variables, their distributions and the representations by density functions, distribution functions, and moment generating functions. Univariate, multivariate, discrete, continuous, mixed, conditional and marginal probability distributions are all discussed in this chapter. Mathematical expectations and moments are the subject of Chapter 3. Conditional expectation and regression are also discussed. The concept of expectation is considered as a measure for the center of gravity of a distribution. It is a little bit peculiar that Jensen's inequality is treated before various elementary properties are derived. The usual (multivariate) parametric families of density functions are treated in chapter 4. In this chapter the exponential class of densities is also discussed. Asymptotic theory is presented in chapter 5. It is an extensive presentation, because it is beyond the standard subjects in similar textbooks: Berry-Esseen bound, triangular arrays,  $M$ -dependence, Lipounov's CLT, et cetera. The statistics theory starts in chapter 6 with a very short introduction to statistical inference. In order to motivate what statistics is all about this is rather late and in fact it is insufficient. The subjects are: random sampling, empirical distribution function (Glivenko-Cantelli), sample moments, transformations (why not in chapter 2?),  $t$  and  $F$  distribution (the  $\chi^2$  distribution has already been treated as a special case of the gamma distribution), random sample simulation, and order statistics (no theory about extreme values). Maybe it would have been more logical to have sampling before asymptotics. Point estimation is treated in chapter 7 and 8. Chapter 7 gives the (classical) theory and Chapter 8 presents methods to obtain estimators. Chapter 7 displays a flavour of the decision theoretic approach. Loss func-



H. Gordon  
**Discrete probability**

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1997.

265p., prijs DM 68,-

(Springer monographs in mathematics).

ISBN 0-387-98227-2

Dit boek gaat in feite over het onderdeel Kansrekening zoals dat in diverse elementaire cursussen en boeken over Waarschijnlijkheidstheorie en Statistiek voorkomt. De inhoud bevat meer dan er over het algemeen en dergelijke cursussen van wordt behandeld. Zo zijn er hoofdstukken over genererende functies, random walks en Markovketens. Zij kunnen echter naar believen worden overgeslagen zonder de continuïteit te schaden. De beperking tot discrete zaken heeft geleid tot meer aandacht voor details dan gebruikelijk, niet alleen met betrekking tot de theorie maar ook ten aanzien van de historische ontwikkeling van de kansrekening. Van diverse personen is een korte biografie opgenomen. Het boek is geschreven als een elementaire cursus voor wiskunde- en informaticastudenten. Zij worden ingeleid in de kunst van het toch altijd weer moeilijke tellen door middel van vele uitgewerkte voorbeelden. De opzet van de theorie is formeel. Een goed studieboek. Er zijn maar liefst 405 opgaven met 1196 antwoorden opgenomen.

J. van der Kleij

tions are not discussed, but admissibility is defined for quadratic loss. Further topics are (minimal) sufficient statistics and complete statistics and the role played by exponential classes of distributions. Lehmann-Scheffé and Rao-Blackwell theorems are established. Of course the Cramér-Rao lower bound is discussed. It is strange that the information matrix is discussed, but it is not given this name. Chapter 8 starts with GLM and least squares. GLM stands for general linear model and is not to be confused with the more common abbreviation of generalized linear model. Subsequently the method of maximum likelihood and the method of moments are presented and a lot of relevant related theory is also discussed. It is nice that instrumental variable techniques, two- and three-stage least squares, et cetera are mentioned. One would expect now a chapter about confidence intervals, but this subject is more or less hidden in section 10.7. This is a bit peculiar, point estimation is important, but assessing uncertainties is in fact the main theme in inferential statistics. Chapter 9 and 10 are devoted to hypothesis testing. Chapter 9 provides the traditional theory: unbiasedness, admissibility, Neyman-Pearson fundamental lemma, monotone likelihood ratio, et cetera. Chapter 10 is about hypothesis-testing methods. It is nice to have a section entitled 'heuristic approach'. The methods treated are generalized likelihood ratio, Lagrange multiplier and Wald test. Section 10.6 is devoted to testing in the general linear model. Section 10.7 treats some theory about confidence intervals: relation with critical regions and pivotal quantities. Section 10.8 discusses the  $\chi^2$  goodness-of-fit test. Attention is paid to testing normality and three well-known tests are described. The use of graphical methods is not mentioned. In this section the Wald-Wolfowitz runs test is also given.

The presentation is technical. A lot of results and their proofs are given. The book is rigorous and covers a wide variety of subjects that are especially of interest to econometricians. The book has not the intention to present the basics on nonparametric statistics. (M)ANOVA is not discussed. The Bayesian approach is not treated. The philosophy of the author is that a fundamental statistical background is necessary to appreciate a text that more or less gives a survey of various statistical techniques. Students who have already studied statistics at a little higher level than elementary statistics will indeed appreciate this textbook if they like mathematics. If we look at the presentation then the author rightly claims in the preface that no prior knowledge of probability or statistics is required. This being true from a theoretical point of view, for a lot of students a background in statistics at a level somewhat higher than the elementary level will be very helpful in appreciating the text. The text is not inspiring for students who have to do real applications. One way or the other lecturers will have to provide material that can motivate and stimulate students.

A.G.M. Steerneman

E.M.J. Bertin, I. Cuculescu et al.

### Unimodality of probability measures

Dordrecht, etc.: Kluwer, 1997. 251 p., prijs f210,-

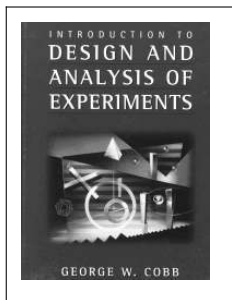
(Mathematics and its applications; 382). ISBN 0-7923-4318-2

Een groot gedeelte van dit boek was al in 1994 gereed. De tweede auteur heeft, na het overlijden van Bertin in dat jaar, dit goed geschreven boek helpen afronden. Uitgangspunt is de *stelling van Khinchin* uit 1938 die stelt dat elke *unimodale* kansmaat op  $\mathbb{R}$  (met modus 0) te schrijven is als een mengsel van homogene kansmaten op intervallen van de vorm  $(a, 0)$  of  $(0, a)$ . De Lévy-Shepp-versie van deze stelling is in termen van stochastische variabelen:  $X$  heeft een unimodale verdeling als en alleen als  $X$  dezelfde verdeling heeft als  $UZ$  met  $U$  en  $Z$  onafhankelijk en  $U$  homogeen verdeeld op  $(0, 1)$ . In termen van karakteristieke functies wordt de Khinchin-Fourier-versie verkregen. Khinchins stelling kan gezien worden als een niet-compacte variant van de bekende stellingen van Krein-Milman en Choquet uit de convexiteitstheorie. Na een voorbereidend eerste hoofdstuk, waarin een lijst met notaties, ontwikkelen de auteurs in hoofdstuk 2 aan de hand van Choquet-convexiteitstheorie een abstract raamwerk voor unimodaliteit; de resulterende zogeheten Khinchinruimten bevatten kansmaten die een Khinchin-achtige voorstelling hebben. Ook in deze algemene setting worden Lévy-Shepp- en Khinchin-Fourier-versies gepresenteerd. In hoofdstuk 3 wordt een speciale Khinchinruimte van kansmaten op een Hilbert-ruimte  $H$  geconstrueerd; deze kansmaten worden *beta-unimodaal* genoemd, omdat de beta-verdeling een speciale rol speelt. Wanneer  $H = \mathbb{R}$ , worden de verdelingen verkregen van  $UZ$  met  $U$  en  $Z$  onafhankelijk en  $U$  beta-verdeeld. Ingeval  $H = \mathbb{R}^n$  wordt beta-unimodaliteit vergeleken met verschillende bekende unimodaliteitsbegrippen. Hoofdstuk 4 is geheel gewijd aan Khinchins klassieke unimodaliteit op  $\mathbb{R}$ ; met name worden karakterisering in termen van quasi-concaviteit en concentratie-functies gegeven. Voor *discrete unimodaliteit* van kansmaten op  $\mathbb{Z}$  zijn verschillende definities mogelijk; deze worden gegeven en vergeleken in hoofdstuk 5. Ook wordt verband gelegd met de Khinchinruimten van hoofdstuk 2; in het bijzonder worden (discrete) beta-unimodale verdelingen op  $\mathbb{Z}$  onderzocht, dit zijn verdelingen van stochastische variabelen van de vorm  $U \odot Z$  met  $U$  beta-verdeeld,  $Z$  een  $\mathbb{Z}$ -waardige stochastische variabele en  $\odot$  de voor de hand liggende generalisatie van de binomiale uitdunningsoperatie zoals ingevoerd door Steutel en van Harn. Hoofdstuk 6 is gewijd aan *sterk unimodale* kansmaten op  $\mathbb{R}$ , dit zijn (unimodale) kansmaten waarvan de (additieve) convolutie met elke andere unimodale kansmaat weer unimodaal is; hun relatie met log-concaviteit en dispersiviteit komt uitvoerig aan de orde. Ook zijn er analogons voor multiplicatieve convoluties. Tenslotte wordt in hoofdstuk 7 onder andere positiviteit van de oneven centrale momenten van een unimodale kansmaat op  $\mathbb{R}$  of  $\mathbb{Z}$  bewezen.

Zoals gezegd, het boek is goed geschreven. Elk hoofdstuk begint met inleidende beschouwingen en een samenvatting; bovendien bevat elke paragraaf een samenvatting van enkele regels. De hoofdstukken eindigen met een paragraaf met historische opmerkingen en aanvullende informatie. Er is, naast een goede index, een uitvoerige literatuurlijst met 233 titels. Deze zijn alfabetisch gerangschikt overeenkomstig de gebruikte afkortingen; dit heeft soms tot gevolg dat artikelen van eenzelfde (eerste) auteur niet bij elkaar staan. Waarom de lijst met notaties achterin het boek

niet opgenomen is in de lijst van hoofdstuk 1 (of omgekeerd), is mij niet duidelijk. Het (wellicht niet te vermijden) overvloedige gebruik van notaties voor allerlei klassen van maten, functies, et cetera maakt het boek af en toe wel moeilijk leesbaar. Dit gebruik is ook niet altijd zorgvuldig; zo wordt de notatie  $S$  voor de verzameling van sterk unimodale kansmaten in een voorbeeld in hoofdstuk 2 ingevoerd en zonder nadere toelichting in hoofdstuk 6 gebruikt. Niettemin is het boek zeker aan te bevelen, vooral aan hen die geïnteresseerd zijn in de gemeenschappelijke aspecten van de verschillende unimodaliteitsbegrippen. Voor een eerste oriëntatie op het gebied van unimodaliteit op  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{Z}^n$  is het ook door de auteurs genoemde boek van Dharmadhikari en Joag-dev (*Unimodality, convexity, and applications*) wellicht meer geschikt. Beperking tot kansmaten op  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{Z}^n$  zou ook het onderhavige boek toegankelijker gemaakt hebben (en zou behandeling van de meeste toepassingen in hoofdstuk 3 tot en met 7 niet onmogelijk maken). Anderzijds geeft de gevolgde abstracte opzet misschien meer aanleiding tot nieuw onderzoek en nieuwe toepassingen.

K. van Harn



G.W. Cobb  
**Introduction to design and analysis of experiments**

New York: Springer-Verlag, 1998.

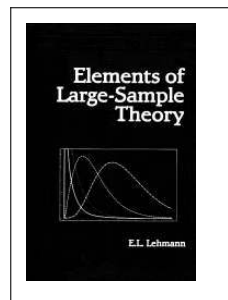
795 p., prijs DM 114,-.

ISBN 0-387-94607-1

Dit boek biedt een onconventionele benadering van de theorie van proefopzetten. Het is bedoeld voor studenten die nog geen statistische achtergrond hebben en voor het eerst met statistiek kennis maken in het kader van het opzetten van experimenten. De basisstatistiek komt aan bod in de context van het opzetten van deze experimenten en in de context van het analyseren van de resultaten van experimenten. Een opmerkelijke en moeilijke keuze. Zonder dat de student enige kennis heeft van betrouwbaarheidsintervallen of toetsen van hypothesen wordt begonnen met de principes van het ontwerpen van een proefopzet. Dat heeft natuurlijk wel aantrekkelijke aspecten. Het is bij zo'n aanpak mogelijk helemaal bij het begin te starten. Het boek begint dan ook met een voorbeeld van een wetenschapper die onderzoek wil gaan doen naar de omstandigheden die dieren ertoe bewegen om in winterslaap te gaan. De lezer wordt aan de hand meegenomen bij de beslissingen die de wetenschapper moet nemen om het onderzoek te doen. Op een intuïtieve manier wordt uitgelegd welke beslissingen er genomen moeten worden, welke veronderstellingen er gemaakt worden en welke dingen een rol kunnen spelen. Voorbeelden hangen er hier niet los bij, maar vormen de leidraad. Een ander groot pluspunt is de zeer heldere manier waarop de basisprincipes van proefopzetten worden uitgelegd. Deze basisprincipes krijgen veel aandacht en er wordt veel moeite gedaan om (weer aan de hand van voorbeelden) uit te leggen waarom die principes wezenlijk zijn. Enkele voorbeelden daarvan zijn: uitleg van potentiële variatiebronnen (gewenst en ongewenst), noodzaak van randomisatie, blokvorming. Wat dat betreft kan ik het boek zeker aanraden.

Echter, en dat is de keerzijde van de medaille, op een gegeven moment houdt de intuïtie op. Sommige dingen kunnen nu niet exact worden uitgelegd. Over de foutenstructuur wordt opgemerkt dat hij 'chance-like' is. De standaarddeviatie wordt gedefinieerd als de 'typical size' van de fout. Er is een paragraaf met het formele model (overigens optional) zoals de meesten van de lezers dat zullen kennen. De formele definitie voor de foutterm is: "we assume the error terms behave like independent draws from the same box of numbered tickets (same standard deviation), with the average of box equal to zero, and that a dot graph for the tickets follows a normal curve". Ik begin dan toch wel de formele wiskundige benadering met behulp van kansrekening te missen. Als het toetsen voor het eerst wordt geïntroduceerd, gebeurt dat aan de hand van het voorbeeld van een rechtszaak. Op zich een mooie analogie, die ik ook vaak in mijn onderwijs gebruik. Echter, dan wordt gezegd: "the jury takes the form of a table of critical values, created by Fisher, that will tell us how to judge the F-ratio". Ook de latere wat preciezere definitie blijft in de lucht hangen. Een betrouwbaarheidsinterval op grond van de  $t$ -verdeling wordt als volgt ingevoerd: "Instead of  $\pm(SE \times 2)$  for the interval, you use  $\pm(SE \times t\text{-value from a table})$ ". Dit alles wordt mij teveel een deus ex machina. Samengevat: de principiële keuze van de schrijver heeft gemaakt dat de basisprincipes van proefopzetten zeer helder worden uitgelegd en wat dat betreft zal ik het boek zeker nog eens openslaan om na te lezen hoe bepaalde principes kunnen worden uitgelegd. Ik mis op sommige plaatsen de wiskundige en kantheoretische onderbouwing. Op een gegeven moment kan je nu eenmaal niet zonder. Bovendien denk ik dat in de meeste curricula men toch wel eerst iets van kansrekening en statistiek gehad heeft. Waarom zou je je dan in zoveel bochten wringen?

E.E.M. van Berkum



E.L. Lehmann  
**Elements of large-sample theory**

New York: Springer-Verlag, 1999.

631p., prijs DM 159,-

(Springer texts in statistics).

ISBN 0-387-98595-6

Velen van ons zijn vertrouwd en groot gebracht met de boeken van E.L. Lehmann. Deze zijn als regel zeer doorwrocht en beschrijven met een grote wiskundige diepgang de belangrijkste statistische concepten. De vraag dringt zich op wat Lehmann nog te publiceren zou hebben. Het antwoord daarop is zijn nieuwe boek, *Elements of Large-Sample Theory*. In dit boek slaagt Lehmann erin om veel ideeën en concepten uit zijn voorgaande boeken samen te vatten en overzichtelijk te presenteren op een meer toegepast niveau. Veel stellingen worden gepresenteerd en besproken, maar voor een bewijs wordt verwezen naar achterliggende, als regel goed toegankelijke literatuur. Er zijn zeven hoofdstukken. Na twee inleidende hoofdstukken 'Mathematical background' en 'convergence in probability in law', behandelen de volgende twee hoofdstukken 'The performance of statistical tests' en 'Estimation'. Deze worden gevolgd door hoofdstuk 5 met 'Multivariate extensions', en hoofdstukken 6 en 7 die gaan over

'Nonparametric estimation' en 'Efficient estimators and tests'.

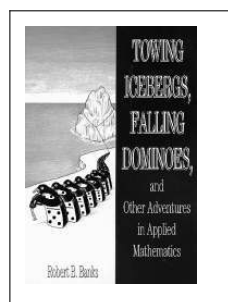
Het lezen van dit boek kan geen grote problemen met zich meebrengen, hoewel het wiskundige niveau nog steeds redelijk hoog is. Maar het onderwerp is natuurlijk ook van dien aard, dat een niet-wiskundige behandeling in feite onmogelijk is. De referenties zijn steeds zodanig dat zonder veel problemen de achterliggende bewijzen en redeneringen kunnen worden opgezocht en zo nodig worden gevolgd. Door op een dergelijke manier selectief te zijn, heeft het boek als belangrijkste voordeel dat een groot aantal onderwerpen nu tezamen komt in één enkele band, waar tot op heden tenminste drie boeken voor nodig waren: het toetsen van hypothesen, het maken van schattingen en verdelingsvrije statistiek. Al deze onderwerpen worden vanuit een enkel perspectief behandeld, wat het boek een grote mate van uniformiteit geeft. Bovendien is het boek geschreven door een van de grootste statistici van onze tijd, zodat we met alle vertrouwen het boek iedere keer opnieuw kunnen raadplegen als een standaardwerk. En dit bijna encyclopedische karakter maakt het boek uniek. Het bevat daarnaast een zeer groot aantal opgaven en uitbreidingen, zodat er meer dan voldoende materiaal is om verder te komen.

De enige beperking van het boek in mijn ogen is het betrekkelijk geringe aantal uitgewerkte voorbeelden, terwijl het ontbreken van bewijzen af en toe ook wel eens storend werkt, met name om de redeneringen te kunnen blijven volgen. Maar gezien alle voordelen is dat uiteraard van secundair belang. Wellicht ook kan de uitgever een volgende druk van een wat minder schreeuwende gifgroene omslag voorzien. Bij elkaar geeft het boek een prima overzicht van de wiskundige statistiek. Het presenteert een grote rijkdom aan wiskundige concepten die het vakgebied zo uniek gemaakt hebben. Het lijkt geen twijfel dat het boek snel een standaardwerk zal zijn en dat het keer op keer gebruikt zal worden om details te checken, de juiste toets te selecteren, de toepasbaarheid van toetsen na te gaan en de juiste toetsingsprocedures vast te stellen.

A. Stein

plementation in an object oriented, procedural language. The rest of the book documents the library.

W.A. van der Meiden



R.B. Banks

**Towing icebergs, falling dominoes and other adventures in applied mathematics**

Princeton: Princeton University Press, 1998.

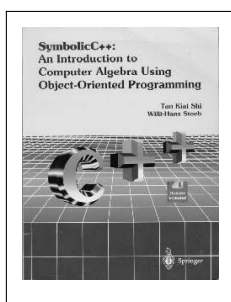
328p., prijs \$ 29,95.

ISBN 0-691-05948-9

Dit gemakkelijke boek behandelt een aantal toepassingen van de wiskunde. De drijfveer van het boek vormen de toepassingen, en de benodigde wiskunde wordt erbij gehaald en uitgelegd. Niet alle details komen aan het bod en geregeld wordt er verwezen naar andere publicaties die het betreffende onderwerp verder uitdiepen. Als voorbeeld wordt bekeken of het mogelijk is om een ijsberg van de zuidpool naar de baai van San Francisco te slepen om die daar gebruikt te worden voor drinkwater. In dat geval wordt de kortste route bepaald, de grootte van de ijsberg die kan worden meegenomen, de snelheid die moet worden aangehouden om zo weinig mogelijk water te verliezen aan smelten door zowel de lucht en watertemperatuur als de wrijving, wanneer er moet worden afgeremd, wat de meest economische manier is om het ijs te smelten. In dit geheel komen zaken aan de orde als boldriehoeksafmetingen, statistiek en differentiaalvergelijkingen, technieken die ook in de andere hoofdstukken een belangrijke rol spelen. De andere toepassingen liggen in de economie (groei modellen), het vallen van regendruppels en meteorieten, het idee achter allerlei soorten gebouwen en draagbogen, en sport (hoe moet je een 'eerlijk' landenklassement van de olympische spelen opstellen, hoe zorg je door middel van de selectie van rekruten dat niet altijd dezelfde teams winnen, aërodynamica van geworpen en geslagen ballen, skispringen en snelheid van hardlopers).

Het is jammer dat er enige slordigheden in het boek voorkomen. Zo wordt bijvoorbeeld in het eerste hoofdstuk ingegaan op fysische dimensies. Daar worden niet alle gebruikte dimensies ingevoerd (wat is een eenheid van viscositeit?) en de term voor wrijvingskracht heeft een verkeerde dimensie. In veel gevallen worden constanten gekozen door een kleinste-kwadratentechniek naar echte meetgegevens. Er wordt niet altijd duidelijk gemaakt waarom bepaalde termen verwaarloosd kunnen worden, en waarom de kleinste-kwadratenmethode gebruikt wordt op de geselecteerde assen (vaak logaritmisch). Al met al is het een inspirerend boek voor mensen die voorbeelden zoeken voor het gebruik van wiskunde. Een aantal voorbeelden is interessant om ook leken en scholieren mee enthousiast te maken.

F. van der Linden



W.H. Steeb, K.S. Tan

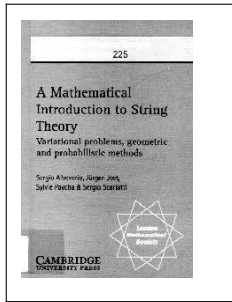
**Symbolic C++  
An introduction to computer algebra using object-oriented programming**

Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1998.

598p., prijs DM 98,-.

ISBN 981-3083-55-7

This book describes the features of a library for computer algebra, written in C++. The library can be used in any C++ program. Source files are available on floppy disk. Inheritance and late binding are used to implement the classes that involve expression trees, C++ templates and operator overloading are used for those representing variables and containers. Chapters on computer algebra, mathematics, object orientation and C++ only provide results and examples, no introduction to theory or underlying ideas. These chapters may make the book self-contained for those who are interested only in applying the library to get the results they need. However, they do not replace introductory textbooks on these topics. For students in mathematics of computer algebra, the book may complement the theory, by showing an im-



S. Albeverio, J. Jost et al  
**A Mathematical introduction to string theory. Variational problems, geometric and probabilistic methods**  
 Cambridge: Cambridge University Press, 1997,  
 prijs £22.95 (London Mathematical Society  
 lecture notes series; 225). ISBN 0-521-55610-4

Dit boek brengt een combinatie van probabilistische en meetkundige methoden bij de behandeling van bosonische snaren. Het meetkundige startpunt is het Plateau-probleem (minimaaloppervlakken), het probabilistische, de (Euclidische) padintegraal, die voor stringtheorie vooral onder impuls van A. Polyakov werd ontwikkeld. Hierbij wordt gemikt op een andere dan de gebruikelijke 'fysische' behandeling. Een samenvatting hiervan (als inleiding en motivatie) neemt drie bladzijden in beslag. Zij wordt zeer uitdrukkelijk bestempeld als heuristisch. Op pagina 3 komt het woordje 'heuristic' liefst negenmaal voor; de lapsus in de omschrijving van heuristic "... for objects which are (or are not yet) defined in rigorous mathematical terms" is dan ook verbazend: dit moet uiteraard zijn: "...objects which are not (or are not yet)..." In wat volgt zal deze heuristische behandeling vervangen worden door een mathematisch veel preciezere. Hierbij putten de auteurs zeer uitgebreid uit eigen werk in verband met het preciseren van het begrip padintegraal, werk dat reeds aanving in de eerste helft van de jaren zeventig, maar dat sinds de helft van de jaren tachtig dus ook op snaartheorie werd toegepast.

In ongeveer 85 bladzijden wordt het wiskundige apparaat samengebracht. Dit begint bij het probleem van Plateau, maar gaat onmiddellijk door met de topologische en metrische structuur van ruimten van afbeeldingen. Deze twee komen samen in harmonische afbeeldingen en Cauchy-Riemann-operatoren, maar dan is er een plotse verandering van decor: de zeta-functiemethode voor determinanten van operatoren wordt ingevoerd, de Faddeev-Popov-procedure voor ijktheorieën, en determinantbundels met hun Chern-klassen. Hierna weer een verschuiving van de aandacht, nu naar Gauss-maten voor fluctuerende velden, en functionele methoden voor de kwantisering, met speciale aandacht voor het Liouville-veld. Dit eerste deel wordt afgesloten met formules voor het asymptotisch gedrag van determinanten geregulariseerd met warmtekernels. In ongeveer 35 bladzijden wordt dit alles toegepast op de Polyakov string. Eerst even de kwantisatie met functionele integralen invoeren, dan via enkele korte secties naar de Polyakov maat, zowel voor de kritische als voor de niet-kritische snaar. Een paar bladzijden over correlatiefuncties besluiten de tekst. Er zijn nog zeven bladzijden verwijzingen naar de literatuur, en een korte index (2 bladzijden).

De nadruk ligt onomwonden op de wiskundige uiteenzetting, niet op de fysische inhoud. Dit blijkt uit de gekozen volgorde (zie boven), en uit de stijl van de presentatie. Voor de stijl respecteer ik de keuze van de auteurs, maar voor de volgorde vind ik die niet gelukkig: wie niet zeer goed op de hoogte is van het fysische kader, én van het schema dat door fysici gehanteerd wordt voor kwantum-snaartheorie, raakt al snel het spoor kwijt, en naar ik vrees ook de motivatie om zich door de gevarieerde verzameling van wiskundige hoofdstukken heen te worstelen, om pas na tweederde van de tekst het fysische onderwerp aan te snijden.

Een geïntegreerde aanpak zou naar mijn smaak de motivatie van de student meer steun hebben gegeven. Ik kan dit boek niet aanbevelen als eerste kennismaking met snaartheorie, ook niet voor wiskundigen: men dient eerst een meer fysische behandeling te lezen. Voor wie daarna op zijn honger blijft zitten wat betreft wiskundige precisering is dit boek echter uitstekend. Het behandelt weliswaar slechts één lijn bij de kwantisering (padintegralen, geen cohomologische (BRST) noch operatormethoden), maar dat is dan wel de belangrijkste in de moderne praktijk. Het komt ook niet toe aan snaren met fermionische vrijheidsgraden, maar gezien de aandacht voor wiskundig detail kon dit moeilijk anders binnen het bestek van nog geen 150 bladzijden. Kortom, een goede aanvulling bij de 'fysische' literatuur van snaartheorie, voor te behouden voor wie geïnteresseerd is in de gedetailleerde wiskundige precisering van dit populaire model.

W. Troost

E. Fishbach, C.L. Talmadge  
**The search for non-Newtonian gravity**

Springer-Verlag, 1998, 305 p., prijs DM 98.-  
 ISBN 0-387-98490-9

Dit boek gaat over een boeiende episode in de natuurkunde. In 1986 verscheen een artikel, waarvan Fishbach en Talmadge co-auteurs waren, waarin oude experimentele gegevens van de baron Von Eötvös opnieuw geanalyseerd werden. Deze baron deed in het begin van deze eeuw uitgebreid experimenteel onderzoek naar een voorname eigenschap van de zwaartekrachtstheorie van Newton: de eigenschap dat alle lichamen elkaar aantrekken met een kracht die afhangt van de massa's van de lichamen, maar niet van hun (chemische) samenstelling. De conclusies van de baron steunden de theorie van Newton. Door heranalyse van dit experiment vonden Fishbach en anderen aanwijzingen voor een weliswaar kleine, maar toch onmiskenbare afwijking van de theorie van Newton. Dit bracht vanzelfsprekend de nodige commotie teweeg in de wereld der natuurkundigen. Het verschijnsel dat aan de vermeende afwijking ten grondslag zou liggen werd bekend als de 'vijfde kracht'. Er volgde een korte periode met veel publiciteit rond de vijfde kracht. Deze periode wordt vanuit wetenschapshistorisch oogpunt beschreven in het voortreffelijke boek *The rise and fall of the fifth force*, van A. Franklin (AIP, New York 1993).

Fischbach en Talmadge beschrijven de ontwikkelingen in dit gebied van 1986 tot heden, nu vanuit natuurkundig perspectief. Het zal duidelijk zijn dat het eerder genoemde artikel uit 1986 een uitdaging voor de experimentele natuurkundigen vormde. Immers, men zou verwachten dat het Eötvös-experiment met de huidige technieken met grotere nauwkeurigheid uitgevoerd zou kunnen worden. De verdere uitwerking van de vijfde kracht leek een kwestie van tijd. Dit bleek allemaal aanzienlijk minder eenvoudig. Laboratoriumexperimenten over de zwaartekracht waren en zijn nog steeds buitengewoon moeilijk, en eensluidende conclusies zijn over dit onderwerp nog niet getrokken. De vijfde kracht is experimenteel niet bevestigd — integendeel, de recente experimenten zijn volledig in overeenstemming met de theorie van Newton. Mede om die reden plaatsen Fishbach en Talmadge hun boek in een wat ruimere context. Er zijn andere afwijkingen mogelijk van Newtons gravitatie-theorie dan alleen die welke het gevolg zijn van de samenstelling van de lichamen die aan zwaar-

tekracht onderhevig zijn. Zo zou ook de afhankelijkheid van de kracht van de afstand tussen twee lichamen anders kunnen zijn dan Newton voorschrijft. Ook metingen van de gravitatieconstante van Newton worden besproken. Daarnaast wordt uitgebreid toegelicht in hoeverre een vijfde kracht geplaatst zou kunnen worden in het beeld van de elementaire-deeltjesfysica als geheel. Ook gravitatie van anti-materie wordt besproken. De algemene relativiteitstheorie van Einstein komt niet aan de orde. Deze theorie voorspelt afwijkingen van de zwaartekrachtswet van Newton die in extreme omstandigheden — sterke zwaartekrachtsvelden, grote snelheden — van belang zijn, en veel van deze voorspellingen zijn inmiddels bevestigd. Bij geofysische metingen en bij experimenten in het laboratorium zijn de omstandigheden echter van dien aard dat afwijkingen ten gevolge van de relativiteitstheorie te verwaarlozen zijn.

Het boek geeft een mooi overzicht van recente experimenten met de zwaartekracht. Het is nuttig en leerzaam voor natuurkundigen die een overzicht over dit gebied van de experimentele fysica willen hebben. Het plezier bij het lezen van dit boek zit, wat mij betreft, in de gedetailleerde beschrijving van de experimenten, in samenhang met hun theoretische achtergrond. Er zijn nuttige appendices over de meting van Newtons gravitatieconstante, over de precieze interactie tussen de zwaartekracht en een torsie-balans, essentieel om de experimenten naar de vijfde kracht te kunnen begrijpen, en over de precieze vorm van het zwaartekrachtveld van de aarde, nodig voor de geofysische zwaartekrachtmetingen.

Het boek is voor iemand met een solide achtergrond in de natuurkunde goed leesbaar. Alleen het hoofdstuk over effecten in de elementaire deeltjes fysica, in het bijzonder over neutrale K-deeltjes, vereist gespecialiseerde kennis. Voor belangstellenden die zich tot de geschiedkundige aspecten van deze episode willen beperken zou ik het eerder genoemde boek van Franklin willen aanraden. De conclusie van het boek is, dat er op dit moment geen 'compelling evidence' voor een vijfde kracht is gevonden. Maar dit hoofdstuk van de natuurkunde is geenszins afgesloten. Nieuwe experimenten, ook in satellieten, zijn in voorbereiding. Wordt vervolgd.

M. de Roo

J. Hofbauer, K. Sigmund

### **Evolutionary games and population dynamics**

Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

323 p., prijs £16,95 (pb). ISBN 0-521-62570-X

This book replaces the book *The theory of evolution and dynamical systems* by the same authors and publisher, published in 1988. The 1988 book has been praised rightfully as an example of how to write a textbook on a subject in biomathematics that is of interest for students both in biology and mathematics. It dealt with an exciting (relatively) new area where game theory, evolution and ecology were brought together. The book has been reprinted a number of times since its publication and was a pioneer in the field. In the last ten years a lot of progress has been made notably in evolutionary game theory and dynamical aspects of games. Also, the intersection between game theory and population dynamics, not yet very tight in the pioneering book, has become a much more coherent whole (the number of people mentioned in the preface has quadrupled). These aspects together justify that a

new book was called for, rather than a new edition of the existing volume. Almost all the biological introductions in the 1988 book have been deleted to make room for new mathematical developments.

Many sections from the older book have been included somewhere in the new book, but a clearer view of the subject and the new material added have caused almost everything to be in a different place than before. The result is that indeed the book is more of a whole than the previous one, but unfortunately the result is also that the book has shifted substantially from a more biological to a more mathematical audience. The mathematical level has increased throughout. While this certainly does justice to the developments in the last decade, it is a pity since the suitability as a textbook for biology students has decreased. However, as textbook for mathematics students on applications of game theory and dynamical systems in an exciting biological setting, the book is as excellently written as before. In the meantime, also the mathematical skills of one of the authors seem to have increased. In the 1988 book, some exercises were quite hard "at least for one of the authors". This statement has been excluded from the corresponding paragraph in the new preface.

J.A.P. Heesterbeek

A. Verweij, M. Kindt

### **Perspectief, hoe moet je dat zien?**

Utrecht: Epsilon Uitgaven, 1999. 52 p., prijs f14,75

(Zebra Reeks; 2). ISBN 90-5041-052-9

De uitgave van de Zebra reeks is geïnspireerd door de introductie van de tweede fase in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. In de nieuwe wiskundeprogramma's van het vwo is een klein gedeelte bestemd voor keuzeonderwerpen. Toetsing vindt plaats binnen het schoolexamen en mag uiteenlopen van mondeling verslag tot schriftelijke presentatie. Epsilon Uitgaven heeft in samenwerking met de Nederlandse vereniging voor wiskundeleraars het initiatief genomen om een reeks boekjes uit te geven die in dit onderdeel van de wiskunde gebruikt kunnen worden. Er wordt naar gestreefd om de komende jaren vijf titels per jaar te laten verschijnen. De eerste vijf titels zijn: *Kattnaids en statistiek*, *Perspectief, Hoe spannend is herhalen* (over iteratie en chaos), *De gulden snede* en *Schatten*. *Perspectief* is geschreven door auteurs van de TUD en de UU met ervaring op het gebied van middelbare-schoolwiskunde. Het boekje beschrijft de analyse van perspectiefafbeeldingen met behulp van de wiskunde en weet zo een aantrekkelijke brug te slaan tussen redelijk pittige wiskunde en de kunst van schilderen en tekeningen. De foto's en afbeeldingen vormen een samenhangend geheel met de tekst. Het goede woordgebruik en de verzorgde indruk geven de beoogde doelgroep een bredere kijk op de maatschappelijke relevantie van de wiskunde. De meetkunde is in het nieuwe vwo-examenprogramma drastisch veranderd en hier wordt aansluitend een duidelijke verdieping van de leerstof aangeboden. De uitgave is ook bruikbaar als basis bij een ander nieuw onderdeel van de tweede fase: een verplichte praktische opdracht. De bescheiden prijs is bij een abonnement nog lager dan nu al het geval is. Kortom, een mooi en voorlopig geslaagd initiatief.

C.P. Smit