Jan Wiegerinck
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
janwieg@science.uva.nl

Inaugurele rede

Fijne functie

Complexe functietheorie heeft binnen de wiskundige analyse al honderdvijftig jaar een centrale plaats. Ze heeft ook talrijke toepassingen: vele resultaten bijvoorbeeld op het gebied van de getallentheorie zijn ondenkbaar zonder geavanceerde functietheorie, maar ook is de theorie van bepalend belang geweest voor de aerodynamica. Jan Wiegerinck, op 1 januari 2006 benoemd tot hoogleraar analyse aan de Universiteit van Amsterdam, laat iets zien van twee richtingen in de functietheorie en de mensen daarachter en betoogt dat wiskunde niet slechts als handige hulpwetenschap beschouwd moet worden, maar dat zij ook een veel fundamenteler doel dient.

Voor een zuiver wiskundige is het geven van een voordracht voor een zo gevarieerd gezelschap als hier vandaag aanwezig is, geen eenvoudige opgave. Tenminste als hij de ambitie heeft op zo'n manier over zijn vak te spreken, dat na afloop de toehoorders de zaal verlaten met het idee iets te hebben opgestoken. De oplossing die ik gekozen heb, is om niet alleen over mijn vak maar ook over de mensen er achter te spreken. Ik zal iets vertellen over functietheorie van meer complexe veranderlijken, dat is het gebied waarop ik al jaren met veel plezier werkzaam ben, en over een vrij onbekende stroming binnen de functietheorie van één complexe veranderlijke. Voor mijzelf was het een verrassing dat deze twee nu, honderd jaar na hun ontstaan, in mijn huidige onderzoek samenkomen. Daaromheen zal ik iets zeggen over de zeer verschillende levens van Fritz Hartogs en Emile Borel, de twee protagonisten van deze richtingen. Ik ga het wagen daar conclusies uit te trekken voor mijn vak, het onderwijs, de samenleving en mijzelf.

Hartogs' leven

Welnu, het afgelopen jaar was het eeuwfeest van de functietheorie van meer complexe veranderlijken. Friedrich Moritz (Fritz) Hartogs zette ons vakgebied in 1906 op de kaart door in de *Mathematische Annalen* zijn Habilitationsschrift te publiceren. De indrukwekkende titel was: 'Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen fortschreiten' [1]. Daarmee legde hij de grondslag voor tot nu toe honderd jaar onderzoek op mijn vakgebied.

Hartogs [2] werd op 20 mei 1874 geboren te Brussel. Zijn vader was een Duits-Joodse koopman. In Frankfurt am Main bracht hij zijn jeugd door en doorliep het Gymnasium. Hij studeerde in Hannover, Berlijn en München en promoveerde daar in 1903 bij Pringsheim op een proefschrift over functies van twee complexe veranderlijken. Hij was al in 1900 in Hamburg getrouwd met Therese Gerull; het echtpaar kreeg vier kinderen.

Hartogs begon een mooie carrière als wetenschapper. In München werd hij na zijn promotie privaatdocent; vervolgens in 1910 buitengewoon hoogleraar en in 1927 gewoon hoogleraar op persoonlijke titel. Van Hartogs wordt gezegd dat hij een voorzichtige, stille, enigszins angstige natuur had, en "dat hij de gave zich op te dringen ten enen male ontbeerde". Hij wees bijvoorbeeld een aanbod af om aan de universiteit van Frankfurt hoogleraar te worden, met het argument dat hij de financiële positie van deze universiteit te onzeker vond met het oog op de zorg voor zijn gezin. Dit is bijzonder opmerkelijk, want dit professoraat was wetenschappelijk, financieel en sociaal heel aantrekkelijk, omdat deze universiteit een liberale nieuwe privé-universiteit was, gefinancierd door Joodse bankiers. We kunnen ons bij dit verhaal allemaal de wat wereldvreemde wiskundige voor de geest halen, die in het gewone leven even precies en zorgvuldig probeert te zijn als in zijn wiskunde.

Met het aan de macht komen van de Nazi's in 1933 neemt het leven van Hartogs, zoals van zoveel Joodse mensen, een trieste wen-

Jan Wiegerinck

theorie

ding. In 1935 dwongen de Nazi's alle Joodse ambtenaren met pensioen te gaan. In 1938, na de Kristallnacht, werd Hartogs voor enige weken in Dachau geïnterneerd. In 1939 wordt hij uit de *Deutsche Mathematiker-Vereiniging* gezet.

Hartogs was een voorzichtig mens en niet dom. Al in 1933 had hij zijn huis op naam van zijn niet-Joodse vrouw laten zetten. Zo dacht hij de confiscatie van hun bezit door het Nazi-regime te voorkomen. Joden zonder vaste woon- of verblijfplaats konden namelijk zonder omhaal gedeporteerd worden, en het vinden van andere woonruimte was voor hen bijkans onmogelijk. In 1941 bleek deze constructie niet meer voldoende. Het echtpaar kwam tot de conclusie dat alleen een echtscheiding, of in ieder geval een aanvraag daartoe, in beslagname van hun huis kon voorkomen. In goede harmonie besloten ze dat Therese echtscheiding zou aanvragen en Fritz zich zou verzetten. Zo rekten ze de zaak een tijdje, maar in januari 1943 werd de scheiding uitgesproken. Het gevolg was dat Hartogs vanaf dat moment illegaal in zijn huis verbleef. Het vinden van andere woonruimte was uitgesloten, dus dreigde voor Hartogs ieder moment deportatie. Zijn omstandigheden verslechterden voortdurend; hij was al geïsoleerd geraakt van zijn wiskundige vrienden en werd meer en meer depressief. Hij kon de situatie niet lang het hoofd bieden. Op 18 augustus 1943 pleegde hij met slaapmiddelen zelfmoord.

Hartogs heeft het allemaal vrij vroeg zien aankomen. Toch heeft hij nooit naar het buitenland proberen te vluchten. Waarom is niet duidelijk. Zorg voor zijn familie kan een rol hebben gespeeld, maar misschien paste zo'n grote stap gewoon niet bij zijn natuur.

Functietheorie rond 1900

Omdat Hartogs' werk grote verschillen laat zien tussen functietheorie in één en in meer veranderlijken, wil ik eerst iets over functietheorie in één veranderlijke zeggen. In de functietheorie bestuderen we de betrekkelijk kleine, maar zeer belangrijke klasse van analytische functies en hun aanverwanten. Tot ver in de 19de eeuw waren deze functies, die complexe getallen als argument hebben, de enige die serieus bestudeerd werden. Vandaar de naam van mijn vakgebied.

Ik zal u niet vermoeien met een formele definitie van complexe getallen en analytische functies. Het is voldoende aan complexe getallen te denken als punten van een plat vlak, waarmee we kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen als met gewone getallen. We spreken wel van het complexe vlak, waarbij we de reële getallen op een lijn, de x-as terug vinden. Functies die de meesten van ons al op de middelbare school zijn tegengekomen, zoals veeltermen, exponentiële functies, logaritmen, sinussen en cosinussen kregen een zinvolle definitie op de complexe getallen en werden zo voorbeelden van analytische functies. Een functie als de absolute waarde is echter niet analytisch.

Functietheorie gaat terug tot Leonhard Euler (1707-1783). Hij was de eerste die succesvol met functies manipuleerde door hun definitiegebied van de reële getallen uit te breiden naar het complexe vlak en bereikte daarmee verbijsterende resultaten van grote schoonheid, zoals de oplossing van het Baselse probleem [3]:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

De theorie werd verder ontwikkeld en geformaliseerd door August L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) en Bernhard Riemann (1826-1866). Toen Hartogs in 1906 zijn baanbrekende ontdekkingen deed, had functietheorie net een fantastisch hoogtepunt bereikt. Riemann had geformuleerd wat heden ten dage het beroemdste vermoeden in de wiskunde [4] is: de zeta-functie

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \cdots$$

heeft buiten zijn reële nulpunten slechts nulpunten op de “kritieke lijn” $x = \frac{1}{2}$.

En, voortbouwend op de geniale inzichten van Euler en Riemann, hadden de Belgische markies Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin [5] (1866-1962) en de Fransman Jacques Hadamard [6] (1865-1963) in 1896 onsterfelijkheid bereikt: onafhankelijk van elkaar bewezen zij de Priemgetalstelling [8].

Euclides wist al dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Priemgetallen zijn alleen deelbaar door 1 en zichzelf, dus $2, 3, 5, 7, 11, 13$ zijn priem. Maar, hoeveel zijn er kleiner dan een gegeven getal n? De priemgetalstelling spreekt uit dat dit er ongeveer $n/\log n$ zijn. Er zijn dus ongeveer $4 * 10^{97}$ priemgetallen kleiner dan 10^{100}.

Vooruitgang in de wiskunde

Honderd jaar na het eerste bewijs van de priemgetalstelling heeft mijn leermeester, Jaap Korevaar, in een populair artikel een ‘eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling’ gegeven [9]. Dit laat zien hoe hard de wiskunde vooruitgaat, en hoeveel beter we begrijpen wat vroeger als ongelooflijk moeilijk gezien werd. Tegenwoordig kunnen onze Bachelor studenten deze wiskunde aan, en zij geven er mooie voordrachten over!

Sterker nog, slimme scholieren uit het VWO zijn in staat om de oplossing van het Baselse probleem te doorgronden, en inzicht te krijgen in de problematiek rond priemgetalverdeling en de Riemann zeta-functie. Dit doen ze onder de inspirerende begeleiding van Jan van de Craats en Roland van der Veen in “webklassen”, die door ons instituut worden georganiseerd. Dat zijn intensieve cursussen via internet voor vwo-ers uit klas vijf en zes, waar jaarlijks tientallen middelbare scholieren aan mee doen.

Hartogs’ werk

Waar Euler mee begon, het uitbreiden van het definitiegebied van analytische functies, en wel zo dat de uitgebreide functie nog steeds analytisch is, heet *analytische voortzetting*. De klasse van analytische functies is zo groot dat analytische voortzetting betrekkelijk vaak mogelijk is, maar zo klein dat als analytische voortzetting mogelijk is, dit in wezen maar op één manier gaat. Men kan de functie gedefinieerd door $f = 1$, $(x < 0)$ op allerlei manieren voortzetten tot de complexe getallen, maar alleen de voortzetting $f = 1$ voor alle complexe getallen is een analytische voortzetting.

Analytische voortzetting was in 1900 goed begrepen: men wist dat er bij ieder gebied functies te vinden zijn die niet analytisch voortzetbaar zijn buiten dat gebied. U moet maar van mij aannemen dat dit een heel natuurlijk resultaat is.

Hartogs’ grote ontdekking was nu dat dit voor analytische functies van twee of meer veranderlijken niet opgaat. Hij toonde in 1906 aan dat de meeste gebieden in de meerdimensionale complexe ruimte de eigenschap hebben dat iedere analytische functie op zo’n gebied voortzetbaar is tot een groter gebied! Deze ontdekking en alle complicaties en verfijningen van het verschijnsel houden de *meer-complexe-veranderlijken-gemeenschap* tot op de dag van vandaag bezig.

Maar Hartogs deed meer. Hij bewees ook dat functies van meer veranderlijken al analytisch zijn als aan een milde conditie is voldaan: ze moeten analytisch zijn als functie van één veranderlijke, wanneer we de andere veranderlijken constant houden.

Voor iedere tweedejaars wiskundestudent, die geleerd heeft dat deze uitspraak niet geldig is wanneer we analytisch door continu of differentieerbaar vervangen, komt dit resultaat als zeer verrassend. Maar verrassender is nog het bewijs dat Hartogs gaf, vooruitlopend op de theorie van plurisubharmonische functies. Deze werden pas in 1942 door Lelong ingevoerd [10]. Op plurisubharmonische functies kom ik nog terug.

Potentiaaltheorie

Mogelijk heeft u nu enig idee bij het woord functietheorie, hopelijk heeft u een beeld van de geschiedenis van dit vakgebied en misschien begrijpt u dat het fijn kan zijn om dit vakgebied te beoefenen, maar het fijne ervan weet u nog niet, en daar wil ik in het vervolg van mijn oratie op in gaan. Daarvoor moeten we het even over potentiaaltheorie hebben.

Euler, Riemann en hun tijdgenoten beoefenden functietheorie niet alleen omdat het zo’n mooi vak is. Functietheorie is een belangrijk hulpmiddel voor klassieke potentiaaltheorie en stromingsleer in het vlak. Ook al is onze ervaringswereld driedimensionaal, veel problemen kunnen door een vorm van symmetrie worden teruggebracht tot een tweedimensionaal probleem, dat met functietheorie eenvoudig kan worden opgelost. Vloeistofstroming om objecten en, tot op zekere hoogte, ook de stroming van gassen kunnen in de tweedimensionale ruimte met functietheorie worden berekend. In het begin van de vorige eeuw rekende Joukowski [11] op die manier aan de opwaartse druk die op een vliegtuigvleugel door de langsstromende lucht wordt uitgeoefend. Hij kon zo een eerste benadering voor het ideale vleugelprofiel geven.

Bij potentiaaltheorie gaat het om potentiaalvelden die ontstaan ten gevolge van een ladingsverdeling of massaverdeling. In zo’n veld bevindt een deeltje (geladen of met massa) zich op een energieniveau afhankelijk van de plaats, en ondervindt daardoor een kracht. Als je het veld kent, kun je de kracht die wordt uitgeoefend uitrekenen, en daarmee in principe ook de baan die het deeltje zal volgen. Ook de werking van de kooi van Faraday of van een bliksemafleider kun je door potentiaaltheorie goed begrijpen. Als natuurkundig model is klassieke potentiaaltheorie in het begin van de twintigste eeuw ingehaald door de quantummechanica, maar het belangrijkst fundamenteel-wiskundige probleem van de potentiaaltheorie werd pas in de jaren dertig door Frostman [12] opgelost.

Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin (1866–1962), Friedrich Moritz Hartogs (1874–1943) en Emile Borel (1871–1956)

Er zitten leuke wiskundige kanten aan potentiaaltheorie die voor een natuurkundige nauwelijks relevant zijn. Ik noem er twee. Een potentiaalveld, wij noemen dat een subharmonische functie, zal in de praktijk continu van de plaats afhangen, maar in de theorie hoeft een subharmonische functie niet continu te zijn. Daarnaast zullen geleiders in de natuur nooit capaciteit nul hebben (dat zou betekenen dat iedere ladingsverdeling op zo'n geleider een onbegrensde potentiaal voortbrengt, en dat betekent dat de geleider heel erg klein is), maar in de potentiaaltheorie zijn zulke geleiders juist interessant.

Fijne functietheorie

Wiskundigen noemen een functie f *continu* als het zo is dat $f(x)$ willekeurig dicht bij $f(y)$ komt te liggen als x maar dicht genoeg bij y ligt. Zo is de functie $f(x) = x^2$ continu, maar de functie $f(x) = 0$ als $x < 0$, $f(x) = 1$ als $x \geq 0$, is niet continu. De definitie staat of valt met het begrip 'dicht bij' en daar is door wiskundigen veel over nagedacht. Het staat ons min of meer vrij om 'dicht bij' zo te definiëren als het ons uitkomt. We denken ons de afstand tussen 0 en positieve getallen minstens een half, en de functie f wordt continu! Dat lijkt misschien raar, maar in het dagelijks leven zijn we daar meer aan gewend dan u denkt.

Ik geef een voorbeeld. Inwoners van Amsterdam weten dat de Grimburgwal twee minuten lopen van de Staalstraat is: de Grimburgwal ligt dicht bij de Staalstraat, maar met de auto doe je er tien minuten over! Je kunt zeggen dat de functie 'rijtijd met de auto' niet continu van de plaats afhangt. Maar je kunt ook je afstandsbegrip aanpassen: definieer de afstand tussen A en B als de tijd die je nodig hebt om met de auto van A naar B te gaan. Met dit afstandsbegrip is onze functie wel continu, maar gaat de topologie, bij wijze van spreken de kaart van het gebied, er heel anders uitzien.

Een aanpassing van de topologie die meer functies continu maakt, heet een *verfijning* van de topologie. In potentiaaltheorie komt dit als volgt uit de verf. De *fijne topologie* is de topologie die alle subharmonische functies continu maakt. Het is een zeer gecompliceerde topologie, maar dit wordt meer dan goedgemaakt door de voordelen van de nieuwverworven continuïteit. Een typische open verzameling ziet er uit als een stukje vlak waaruit oneindig veel, steeds kleinere gaatjes geponst zijn. Het resultaat is een soort gatenkaas, met zoveel gaten dat er geen stukje kaas zonder gat meer uit gesneden kan worden. Hoe diep je ook inzoomt, je blijft gaatjes zien.

Fijne functietheorie is nu functietheorie in de context van de fijne topologie. Deze vorm van functietheorie is veel lastiger dan de gewone. Want de fijne topologie is zo groot dat alleen de eindige verzamelingen compact zijn en daardoor werken de gebruikelijke redeneringen niet meer. Pas in de jaren zestig en zeventig ontwikkelde de Deen Bent Fuglede [13] de theorie van fijne analytische functies van één veranderlijke, maar een robuuste theorie voor meer veranderlijken is er nog steeds niet.

Emile Borel (1871-1956) was de eerste die zich realiseerde dat veel resultaten uit de functietheorie doorgang vinden voor analytisch-achtige functies op fijn-open verzamelingen. Hij promoveerde bij Darboux in 1894 op een proefschrift getiteld *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. In hedendaagse termen geformuleerd: hij toonde aan dat fijne analytische voortzetting een zinvol begrip is. Daarmee weerlegde hij een vermoeden van Poincaré [15]. Hij breidde zijn resultaten verder uit en publiceerde er in 1917 [16] een boekje over: *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*.

Borel werd al in zijn tijd als een groot wiskundige beschouwd vanwege zijn werk in de maattheorie, stochastiek en functietheorie. Zijn *fonctions monogènes* werden in eerste instantie enthousiast onthaald en gezien als een technisch hoogstandje. In de loop der jaren veranderde het perspectief echter en bekeek men de fonctions monogènes steeds meer als een vrij excentriek uitstapje. Ik moet eerlijk bekennen dat ik tot voor kort dezelfde mening was toegedaan.

Eigen onderzoek

Aan de theorie van functies van meer complexe veranderlijken gingen de ontwikkeling van fijne functietheorie geruisloos voorbij. Naar nu blijkt is dat ten onrechte. Collega's uit Uppsala [17] en Krakow [18] en mijn assistent Said El Marzguioui en ik [19] hebben laten zien dat fijne analyticiteit te voorschijn komt als natuurlijk verklaring voor verschijnselen waarmee we in ons vakgebied geconfronteerd worden. Je ziet in de functietheorie van meer veranderlijken wel vaker dat een perifeer één-veranderlijke resultaat helpt bij het beantwoorden van een centrale vraag in meer veranderlijken.

Wij bestuderen de potentiaaltheorie voor meer complexe veranderlijken. De technische term is *pluripotentiaaltheorie*, en het gaat daarbij om de deelklasse van subharmonische functies die onder complexe coördinatentransformaties behouden blijven. Deze zogenaamde plurisubharmonische functies kom je op veel plaatsen in de wiskunde tegen.

Meer nog dan in de klassieke theorie zijn verzamelingen van capaciteit nul, wij spreken van pluripolaire verzamelingen, de moeite van het bestuderen waard, en dat is precies wat ik nu in mijn onderzoek doe. Hartogsachtige voortzettingsstellingen treden ook voor deze verzamelingen op. Natuurlijk hebben pluripolaire verzamelingen er geen boodschap aan dat wij fijne functietheorie lastiger vinden dan de gewone. Fijne analytische variëteiten, wat deze ook mogen zijn, blijken even goed capaciteit 0 te hebben als gewone variëteiten. Wij moeten ons daar maar aan aanpassen, en eigenlijk vinden we dat wel leuk. Fijne functietheorie vanuit een meerveranderlijkenstandpunt levert ons nog jaren stof tot nadenken!

Borel's leven

We keren nu terug naar Borel [20]. Emile Borel is geboren in 1871 in Frankrijk, in het dorpje Saint-Affrique, district Aveyron in de Midi Pyreneeën, waar zijn vader dominee was. Emile werd in zijn dorp een wonderkind genoemd. Maar op achttienjarige leeftijd deed hij in heel Frankrijk van zich spreken door als eerste te eindigen in zowel het concours voor de Ecole Polytechnique als in het concours voor de Ecole Normale Supérieure. Nog voor zijn promotie werd hij in 1893 docent in Lille, in 1897 docent aan de Ecole Normale Supérieure en in 1904 hoogleraar aan de Sorbonne. In 1910 werd hij directeur van de ENS. Vervolgens werd hij in 1921 lid van de Académie Française. Hij organiseerde nationale en internationale wetenschappelijke samenwerkingsverbanden, en hij was doorslaggevend in de oprichting van het Institut Henri Poincaré en het Centre National de la Recherche Scientifique.

Opmerkelijk is dat Borel, en met hem veel Franse wiskundigen aan het eind van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw, zeer politiek betrokken waren. Dit is in tegenstelling tot Hartogs, en eigenlijk ook in tegenstelling tot de meeste wiskundigen van alle tijden. Hoe kwam dat? Borel behoorde tot de Franse school in functietheorie waartoe rond 1900 naast de eerder genoemde Jacques Hadamard ook Paul Painlevé en Paul Appell behoorden. Hadamard en Painlevé waren studiegenoten, Borel had gestudeerd bij Painlevé en was getrouwd met een dochter van Appell, Margueritte, die onder het pseudo-

Alfred Dreyfus, Petit Journal en L'Aurore

niem Camille Marbo bekendheid als schrijfster verwierf. Painlevé had weer les gehad van Appell en hij had Borel bij de familie Appell geïntroduceerd. De grote maatschappelijke en politieke betrokkenheid van juist deze wiskundigen is eigenlijk afkomstig van de toevalligheid dat Hadamard de achteroom was van de vrouw van ene Alfred Dreyfus.

De Dreyfusaffaire [21] was nog ingewikkelder dan de relaties binnen de Franse wiskundige wereld. Alfred Dreyfus was in 1895 de enige Joodse officier werkzaam voor de Franse inlichtingendienst. Hij werd in 1895 van spionage voor Duitsland beschuldigd en tot levenslang op Duivelseiland veroordeeld. Ook nadat er overduidelijk bewijs was gevonden dat Dreyfus onschuldig was en dat hij geen eerlijk proces had gekregen, weigerde de Franse legerleiding de zaak te herzien. Integendeel, groeperingen binnen de legerleiding vervalsten documenten en getuigenissen, en stopten deze in geheime dossiers die gebruikt werden om het vonnis kracht bij te zetten. Het nieuwbenoemde hoofd van de inlichtingendienst, kolonel Picquard, die de werkelijke toedracht achterhaalde, werd zelfs voor schending van ambtsgeheim veroordeeld! Picquard nu, was, nog een toevalligheid, een huisvriend van de Appells.

Er zat een zwaar antisemitisch luchtje aan de zaak. De Franse schrijver Emile Zola schreef een beroemd geworden open brief, gericht aan de president van de Republiek, waarin hij de zaak aan de kaak stelde: *J'accuse* vulde in januari 1898 de voorpagina van het dagblad L'Aurore. De affaire verdeelde Frankrijk tot op het bot in een rechts-conservatief anti-Dreyfus blok en een links, progressief-intellectueel pro-Dreyfus blok. En nog steeds zijn de Fransen niet over de affaire uitgepraat [22]. Uiteindelijk, na drie herzieningsprocessen en één keer gratie, werden Dreyfus en Picquard in 1906 volledig in ere hersteld.

Hadamard, die Dreyfus overigens maar een keer ontmoet had, was in 1897 al overtuigd van diens onschuld. Maar hij kon zijn vriend Paul Painlevé [23] er niet van overtuigen. Deze kon zich eenvoudigweg niet voorstellen dat er zulke verdorvenheid heerste binnen het Franse leger. Pas toen hij er op attent werd gemaakt dat ook zijn gesprekken met Hadamard verdraaid in het dossier terechtkwamen, om achteraf als bewijs voor de schuld van Dreyfus te dienen, realiseerde hij zich dat hij blind was geweest. Daarna was hij helemaal om. Hij sluit zich aan bij de *Ligue des droits de l'Homme*, een club die het werk voor de rechten van Dreyfus generaliseerde naar de rechten van Franse burgers, en stort zich in de politiek. Hij werd in 1910 gedeputeerde voor zijn district en in 1917 minister van Defensie. Dat bleef hij met enige tussenpozen tot 1932. In 1917 en 1925 was hij minister-president [24].

Borel was een goede vriend van Painlevé geworden en hij had dezelfde belangstelling voor politiek en techniek ontwikkeld. Vanaf het begin pro-Dreyfus, behoorde ook hij tot de Ligue des droits de l'Homme. In de Eerste Wereldoorlog diende Borel als officier bij de artillerie. Painlevé haalde hem in 1917 van het front om leiding te geven aan de *Services des Inventions intéressant la de Défense National*, (de dienst voor uitvindingen van nut voor de nationale verdediging).

Borel was al rond 1900 politiek actief geworden en als gevolg van zijn ervaringen in de oorlog werd hij een uitgesproken voorstander van Europese en internationale samenwerking en politiek activist. In 1924 werd hij gedeputeerde van l'Aveyron. In 1925 was hij, radicaal socialist, zelfs even minister van Marine. Hij is van 1927 tot 1947 burgemeester van zijn geboortedorp Saint-Affrique geweest. Na de Eerste Wereldoorlog was Borel een van de drijvende krachten achter de Association Française pour la Société des Nations en de Union internationale des associations pour la Société des Nations. Deze organisaties worden als voorlopers van de Europese Unie en de Verenigde Naties beschouwd.

In de zomer van 1955 nam Borel nog deel aan een grote statistiekconferentie in Brazilië. Tijdens de overtocht terug is hij ernstig gevallen en aan de gevolgen van die val is hij op 3 februari 1956 overleden.

Conclusies

Wanneer ik Hartogs en Borel naast elkaar zet, is mijn eerste gedachte dat de meeste wiskundigen, en misschien wel de meeste wetenschappers, meer op Hartogs lijken dan op Borel, en vervolgens dat Hartogs wel erg in zijn Ivoren Toren zat en er goed aan had gedaan zijn lot meer in eigen hand te nemen. Nee, dan als Borel in de wereld te staan!

Maar zo eenvoudig ligt dat niet. Het engagement van Borel en zijn Franse tijdgenoten kwam door enkele 'life events' tot stand die hem en zijn collega's bijzonder raakten. Het is maar de vraag of dat zonder Dreyfus en de eerste wereldoorlog ook gebeurd zou zijn. En zo expliciet als Borel, en meer nog Painlevé, zijn er niet veel in het publieke domein getreden. Zij hadden bijzondere kwaliteiten! Als Jood in Nazi-Duitsland had Hartogs zeker geen mogelijkheden het lot te beïnvloeden zoals Borel. Op zijn best had hij kunnen ontsnappen.

Laten we nu eens om ons heen kijken. Is er nu aanleiding voor wiskundigen om uit hun instituten te komen?

Universiteit van Amsterdam

Om de hoek zien we de Universiteit van Amsterdam met al zijn problemen. Dit is een feestelijke gelegenheid, maar velen van u zijn maar al te bekend met de problematiek. Twee titels spreken boekdelen. Louise Fresco sprak op 8 januari de Diesrede uit. De titel van haar rede was *Het einde van de universiteit*. In Folia stond een paar weken daarvoor een artikel van de psycholoog Denny Borsboom getiteld *Kafka aan het Spui*. Het aardige van mijn huidige functie van instituutsdirecteur is nu dat je ziet dat zij, en alle klagers, helemaal gelijk hebben en zelfs dat zij zich lang niet van alles wat misgaat bewust zijn. En, je hoort ook nog eens wat: bijvoorbeeld van Arne Brentjes, hoofd *Audit en control* van onze universiteit: 'chaos is een management instrument' [25].

Ik zie echter ook dat de mensen in de organisatie over het algemeen werkelijk hun best doen, en het beste met de universiteit voor hebben. De organisatorische en administratieve problemen van onze universiteit zijn zeker ernstig, maar over vijf jaar zullen ze opgelost zijn, en vast weer vervangen door andere. Ik zal doen wat ik kan om ons instituut en onze faculteit er goed doorheen te helpen.

Gelukkig zijn die problemen maar van secundair belang. Want, eerlijk is eerlijk, waar het werkelijk om draait is onderwijs en onderzoek. Dat is over het algemeen goed aan de UvA. Binnen de faculteit waar ik met enig gezag over spreken kan, zelfs erg goed. We staan hoog in de universitaire hitparade. Hetzelfde geldt, denk ik, ook voor de kwaliteit van onze studenten. Binnen onze opleiding zijn de studenten zeker zo begaafd als aan buitenlandse topinstellingen; een van de problemen waar we tegen aanlopen bij het verhogen van de studenteninstroom wiskunde, is dat het instapniveau van de masteropleiding mathematics bij voortduring te hoog blijkt voor buitenlandse studenten, ook als zij van goede Amerikaanse *colleges* afkomstig zijn.

Ik kan het toch niet laten een paar algemene aanbevelingen te doen voor het beleid aan de UvA. Omdat we vaak met Amerikaanse topuniversiteiten vergeleken worden, baseer ik die op de Amerikaanse situatie.

U zult gemerkt hebben dat ik het alleen over onze wiskundestudenten had. Aan studenten van andere faculteiten geven wij niet of nauwelijks les. In de VS staat het bestuur van ieder *college* dat een beetje wil meetellen erop dat alle studenten wiskundeonderwijs krijgen en dat het door het Maths Department gegeven wordt. Mijn Amerikaanse collega's denken hier gemengd over. Dit onderwijs aan studenten met weinig belangstelling voor wiskunde wordt over het algemeen als minder leuk ervaren dan het geven van 'fijne functietheorie' om maar wat te noemen. Amerikaanse universiteiten doen dit ook niet omdat ze de wiskundigen zo aardig vinden en van werk willen voorzien. Zij hebben het idee dat zij hun studenten moeten vormen, opvoeden zo u wilt. En bij een goede opvoeding hoort wiskunde, gedoceerd door wiskundigen (en Engelse literatuur gedoceerd door Engelse-literatuurwetenschappers enzovoorts). Het zou goed zijn als het college van bestuur dit beleid zou overnemen!

Het verbaast mij, en ik vind het onverstandig, dat de UvA vorming van fondsen niet stimuleert. Dit zou kunnen door inkomsten uit derde geldstroom of anderszins vast te zetten. In de nota *Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen* [26]staat expliciet "De UvA is evenwel geen bank, en hoeft dus geen geld op te potten". Princeton, Harvard en Yale doen dat juist wel! Leuke dingen als speciale leerstoelen, dure apparatuur en goede faciliteiten kunnen worden betaald uit de renteinkomsten van het *endowment*, dat miljarden kan bedragen. Maar belangrijker is nog dat gegarandeerde eigen inkomsten beschermen tegen de willekeur van de overheid.

Een derde aanbeveling is dat de ondersteunende structuren binnen de UvA zich de Amerikaanse mentaliteit jegens het primaire proces tot missie moeten maken. Als eenvoudige postdoc in Princeton hoorde ik daar al van de centrale diensten: "Wij zijn er om jullie je werk beter te laten doen." Bij ons leeft dat misschien wel bij het individu, maar vreemd genoeg is de organisatie niet zo ingericht.

Mijn vierde en laatste aanbeveling is: als het CvB besluit dat grootschalige organisatorische en administratieve wijzigingen noodzakelijk zijn — en om de zoveel jaar zijn ze onvermijdelijk — betrek dan de medewerkers daarbij. Niet alleen als gebruiker, maar ook als expert! Durf gebruik te maken van de kwaliteit die de universiteit in huis heeft! De UvA gaat ons ter harte en voorbeelden als Borel en Painlevé laten zien dat wetenschappers en juist wiskundigen, zeer goed in staat zijn een algemeen belang te dienen als het hun ter harte gaat!

Nederland kenniseconomie

Wat verder weg zien we onderwijs in Nederland. De Nederlandse overheid hecht er groot belang aan om van Nederland een kenniseconomie te maken. Maar we lezen in de krant [27] dat eerstejaars studenten niet kunnen spellen en niet kunnen rekenen. Waarom gaat het zo mis? Ik ben bang dat de overheid ideeën over onderwijsvernieuwing, goed of slecht, vooral omarmt om bezuinigingen op onderwijs van een ideologisch tintje te voorzien. Protesten van docenten mogen dan niet baten, die kunnen makkelijk als 'ouderwets en conservatief' worden weggezet. In Nederland is zo het basis- en middelbaar onderwijs in de exacte vakken de afgelopen twintig jaar op een verpletterende manier te pakken genomen.

De laatste onderwijsvernieuwing is het 'nieuwe leren', dat probeert in te spelen op de ontwikkeling van computer, internet en grafische rekenmachine. Het gaat om competenties, harde kennis zou snel verouderen en hoeft daarom niet in het hoofd te worden opgeslagen; er zijn ook geen 'geleerde' docenten voor nodig. Dit 'nieuwe leren' is volkomen onzin [28]. Computers, internet en grafische rekenmachine breiden onze harde kennis met een zacht wolkje uit [29]. Veel kennis, groot wolkje, geen kennis, geen wolkje. Wat het nieuwe leren propageert, komt er op neer harde kennis te vervangen door zachte wolkjes, en dan houd je aan het eind niets over.

Hier zou je willen dat een Nederlandse Borel zou opstaan. Ik zeg dit met enige schroom, want met de eerste Nederlandse wiskundige die zich in de politiek waagde, liep het slecht af. U weet natuurlijk dat Johan de Witt in 1672 is gelyncht. Maar toch, onze jongens van Jan de Witt [30] komen uit hun instituten en in het geweer! Ik doel op diegenen die vanuit de universiteiten proberen om de kwaliteit van het basis- en middelbaar onderwijs weer op hoog niveau te brengen. Vier hoogleraren die aan het Korteweg-de Vries Instituut verbonden zijn of waren, horen bij deze club: Jan van de Craats, Robbert Dijkgraaf, Klaas Landsman en Lex Schrijver. Als directeur van het Korteweg-de Vries Instituut ben ik daar trots op en ik wil hun werk van harte steunen.

Waarom wiskunde?

Dit is het goede moment om over de zin en het nut van de wiskunde te spreken. Uit wat ik eerder zei heeft U wellicht kunnen opmaken dat wiskunde een nuttige hulpwetenschap is voor andere disciplines. Dit is volkomen juist. Onze hele moderne maatschappij bestaat bij gratie van de toepassingen van de wiskunde, en al te vaak is dit onderbelicht. Maar als onderzoeker interesseren de toepassingen mij persoonlijk minder. Het zijn de vragen die de wiskunde zelf stelt en de prachtige antwoorden, die mij motiveren en fascineren. De woorden van Hilbert [31]"Wir müssen wissen. Wir werden wissen" zijn mij op het lijf geschreven.

Maar mag dat van uw belastinggeld? Ik geloof van wel. Want het is niet alleen zo dat wiskunde wel een handig hulpmiddel is voor toepassingen. Nee, alleen bij de gratie van ons ingebouwd wiskundig vermogen kunnen wij mensen disciplines en beroepen beoefenen waar wiskunde als hulpwetenschap een belangrijk onderdeel van is. En dat worden er steeds meer! Abstractievermogen, ruimtelijk inzicht, analytisch denken, kortom het vermogen tot het doen van wiskunde, is fundamenteel in onze maatschappij. De ontwikkeling van wetenschap en techniek en daarmee onze hele samenleving, wordt vooral door onze wiskundige kant voortgestuwd.

Ik trek twee conclusies. Ten eerste, mensen hebben steeds meer de noodzaak, maar ook het recht, om hun wiskundige kant te ontwikkelen — let wel, ik zeg daarmee niet dat iedereen goed in wiskunde moet worden of het maar moet gaan studeren. Ten tweede, verdere ontwikkeling van de wiskunde is noodzakelijk voor onze vooruitgang. Er is geen keus anders dan wiskunde goed te onderwijzen en verder te ontwikkelen. En dat is nu precies hetgeen ik als onderzoeker, docent en instituutsdirecteur probeer te doen.

Referenties

1 Hartogs, Friedrich M., 'Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen fortschreiten', Math. Ann. 62, (1906), 1-88.

2 Zie bijvoorbeeld Bauer, F.L., 'Friedrich Hartogs, das Schicksal eines jüdischen Matematikers in München', Aviso, Zeitschrift für Wissenschaft und Kunst in Bayern, (2004), 34-41. www.stmwfk.bayern.de/downloads/aviso/2004_1_aviso_34-41.pdf

3 Euler leerde dit "Baselse probleem" kennen door zijn leermeester Johann Bernoulli (1667-1748), die in Bazel hoogleraar wiskunde was. Bernoulli had het probleem waarschijnlijk weer van de Italiaans wiskundige Pietro Mengoli (1626-1686).

4 Riemann formuleerde het probleem terloops in zijn artikel: 'Ueber die Anzahl Primzahlen unter einer gegebenen Grösse', Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 1-10. www.wolfram.com/products/publicon/samples /riemann/Riemann.pdf. Het Riemann vermoeden is een van de Clay-Millenium problemen: de Clay foundation loofde in 2000 een miljoen uit voor diegenen die zo'n probleem oplossen. Zie http://www.clay.org.

5 De la Vallée Poussin, Charles Jean Gustave Nicolas, 'Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers', Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1897.

6 Hadamard , Jacques, 'Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques', [J] S. M. F. Bull. 24, (1896), 199-220

7 Inderdaad, beiden bereikten bijna de honderd.

8 Het bewijs van de priemgetalstelling gebruikt alleen dat de zeta-functie geen nulpunten heeft op de lijn $x = 1$.

9 Korevaar, Jaap, 'Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling', Nieuw Arch. wiskd. (5) 5 (2004) no. 4, 284-291.

10 zie Lelong, Pierre, 'Définition des fonctions plurisousharmoniques', C.R. Acad. Sci. 215, (1942). 398-400.

11 Joukowski, Nikolai, E. 'Uber die Konturen der Tragflachen der Drachenflieger', Zeitschrift fur Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, (1910), 281; and (1912), 81.

12 Frostman, Otto, Potentiel d'équilibre et Capacité des Ensembles, Thèse, Lund, 1935.

13 Fuglede, Bent, 'Sur les fonctions finement holomorphes', Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 31 (1981), no. 4, vii, 57–88.

14 Het proefschrift verscheen als artikel, Emile Borel, 'Sur quelques points de la théorie des fonctions', Ann. de l'Éc. Normale 12 (1895), 2-55.

15 Poincaré had uitgesproken dat analytische voortzetting over een contour die bestaat uit verdichtingspunten van singulariteiten niet zinvol gedefinieerd kan worden, zie: Poincaré, Henri, 'Sur les fonctions à espaces lacunaires', Amer. J. Math. 14 (1892) no 3, 201-221.

16 Emile Borel, Leçns sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, rédigées par Gaston Julia, Paris, Gauthier-Villars, 1917.

17 Edlund, Tomas; Jöricke, Burglind, 'The pluripolar hull of a graph and fine analytic continuation', Ark. for Mat. 44 (2006), 39-60.

18 Edigarian, Armen; Siciak, Józef; Zwonek, Wlodzimierz, 'Bounded holomorphic functions with multiple sheeted pluripolar hulls', Studia Math. 175 (2006) no 3, 233-247.

19 El Marzguioui , Said; Wiegerinck, Jan, 'The plurifine topology is locally connected', Potential Anal. 25, (2006) no 3, 283–288.

20 Zie bijvoorbeeld: J.M.Guieu, 'Emile Borel et la coopération européenne', Bulletin de l'institut Pierre Renouvin, 1998. ipr.univ-paris1.fr/spip.php?page=imprimer&id_article=33.

21 Zie bijvoorbeeld: fr.wikipedia.org/wiki/Affaire _Dreyfus of www.answers.com/topic/dreyfus-affair.

22 Vrij recent nog voerde Jean Doise (1917-2006) argumenten aan dat er überhaupt geen sprake was van spionage, maar dat een contraspionage-afdeling van het franse leger heeft geprobeerd onjuiste informatie te planten. Dit zou door een andere afdeling als "verraad" ontdekt zijn. Duidelijk is wel dat Dreyfus er niets mee te maken had. Zie: Jean Doise, Un secret bien gardé: histoire militaire de l'affaire Dreyfus, Éditions du Seuil, collection XXème siècle, 1994.

23 Zie: Anne-Laure Anizan, Paul Painlevé (1863-1933) Un scientifique en politique, Thèse de doctorat, Institut d'Études Politiques de Paris, Centre d'Histoire Politique, Paris, 2006. ecoledoctorale.sciences-po.fr/theses/theses_en_lig ne/anizan_hist_2006/anizan_hist_2006.pdf.

24 Om precies te zijn, er waren drie kabinetten Painlevé: van 13-09-1917 tot 13-11-1917, van 14-04-1925 tot 27-10-1925 en van 29-10-1925 tot 22-11-1925. Zie ook: perso.orange.fr/savoir-plaisir/histoire/Republique_3.htm.

25 Arno Brendtjes, "Personal communication", oktober 2006.

26 Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen - bestuurlijk voorstel versie 2.3 - Universiteit van Amsterdam, 1 november 2005.

27 Vergelijk bijvoorbeeld Doekle Terpstra, voorzitter HBO-raad: "het niveau bij veel eerstejaars bachelors is dramatisch" in De Volkskrant, 17 januari 2007. In dezelfde krant een scherpzinnige brief van Thomas von der Dunk over de onzin van "het nieuwe leren". Veel eerder al was er de actie "Lieve Maria" van Nederlandse studentenorganisaties, www.lievemaria.nl.

28 Von der Dunk, loc.cit.

29 Bijvoorbeeld: Als ik niet had geweten dat Johan de Witt wiskundige was en de uitdrukking "jongens van Jan de Witt" niet kende, had ik ook niet op internet gevonden dat de uitdrukking "jongens van Jan de Wit(t)" waarschijnlijk terugslaat op de door De Witt opgerichte voorloper van het Corps Mariniers, (en dat het ook een verwijzing zou kunnen zijn naar de troepen van ene Johan de Wert).

30 Johan de Witt: Leider en dienaar van de republiek, Vormer harer machtigste vloten, Verdediger der vrije zee, Verzorger van 's lands gelden, Wiskundige (opschrift op de achterkant van de sokkel van het standbeeld van Johan de Witt op De Plaats, in Den Haag).

31 Hilbert sprak deze aansporing uit in zijn beroemde Königsberger rede, 1930. De uitspraak staat ook op zijn grafsteen.