

Rainer Kaenders

Instituut voor Leraar en School
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.ru.nl

Toepassingen

Lemniscaten en kranen

In het september 2006 nummer van het Nieuw Archief heeft Gijs Nieuwenhuis een artikel over lemniscaatkranen [10] geschreven, waarin wordt ingegaan op hun werktuigbouwkundige aspecten. In dit artikel zal worden ingegaan op de wiskundige ideeën die ten grondslag liggen aan deze kranen. Eerst stippen we nog even aan waarom het ontwerpen van kranen kan leiden tot het gebruik van fraaie meetkunde en daarna concentreren we ons op die meetkunde zelf. We komen dan terecht bij intrigerende zaken als het verband tussen een stangenvierhoek met vaste basisstang en allerlei wiskundige krommen. Een van de elegante ingrediënten is de afbeelding van Darboux, die aan een stangenvierhoek een derdegraadskromme in het complexe projectieve vlak toekent. De eigenschappen van deze kromme representeren de eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoek.

Reeds in 1911 heeft het Haarlemse bedrijf FIGEE ([19]) (zie ook [13]) voor een pakhuis in Rotterdam wipkranen gebouwd. Over het algemeen zijn *wipkranen* hijskranen waar de kraanboom of kraanarm rond een vast punt scharniert. Zij vormen een grote klasse van hijskranen waarvan wij enkele speciale constructies zullen bekijken. De wipkraan in figuur 2 geeft een voorbeeld van een wipkraan die recht doet aan zijn naam.

In [13] vat ir. De Vries een aantal criteria samen waarmee bij het ontwerp van wipkranen rekening moet worden gehouden.

“Ter vermindering van de energie voor het wippen, wordt er naar gestreefd: 1e. de lastweg horizontaal te maken; 2e de maskrachten binnen matige grenzen te houden; 3e de wrijvingsverliezen tot een minimum te beperken en 4e het aandrijfmechanisme zoodanig uit te voeren, dat de massa's langzaam versneld worden, terwijl de snelheid tegen het einde weer afneemt. Het is vanzelfsprekend, dat de bewegende ijzerconstructie gebalanceerd wordt en dat de resultante der krachten, die op den laadboom werken, door het draaipunt gaat of er dichtbij valt.”

De introductie van de lemniscaat bij het bouwen van kranen is vooral geïnspireerd door de eis van een min of meer horizon-

tale lastweg. Dit houdt in dat de last eerst verticaal wordt opgetakeld, dan horizontaal verplaatst en vervolgens weer verticaal wordt neergelaten. Bij het kraanontwerp heeft dit vele voordelen. Dat neemt niet weg dat ook andere aspecten in de praktijk van groot belang zijn:

“Veelal wordt geëischt een zoveel mogelijk horizontale lastweg, wat echter alleen te prefereren is, waneer dit zonder complicaties te bereiken is. In den regel is de weg niet mathematisch zuiver recht, doch een goede praktische benadering. Meer hoeft men niet te eischen, vooral als dit met een eenvoudige constructie bereikt wordt”, schrijft ir. De Vries in [13] (blz. 418).

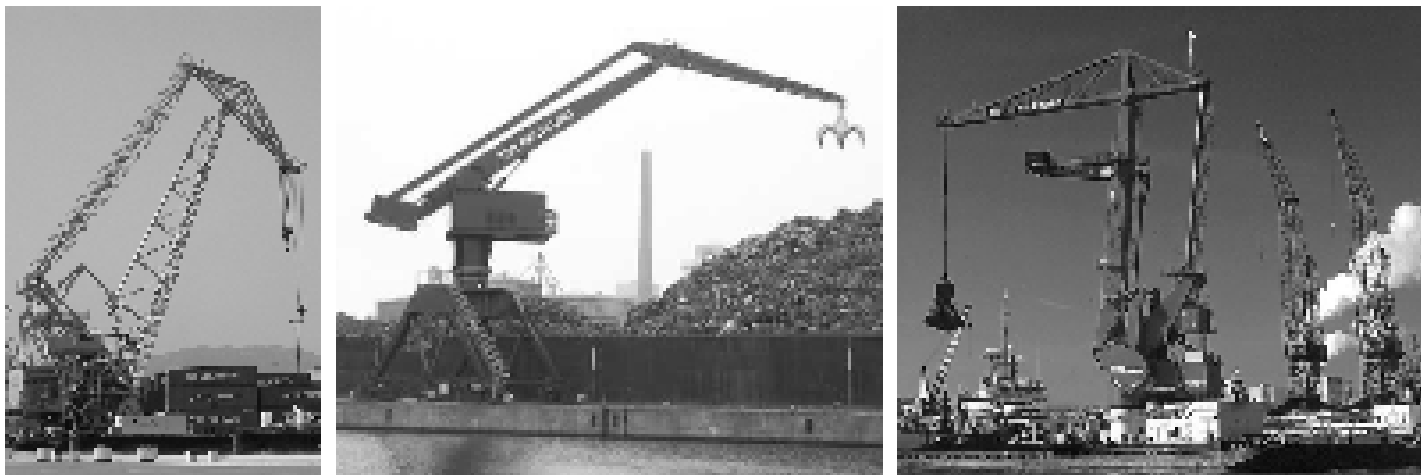
De boeken [13] en [3] geven een prachtig overzicht van kraanconstructies die in de jaren twintig in Nederland en Duitsland zijn ontwikkeld. Het lijkt erop dat er in die tijd een bloei in de constructie van nieuwe hijskranen heeft plaatsgevonden. Speciaal voor kraanconstructies met horizontale lastweg zijn (nog) meer voorbeelden te vinden in [9], [11] of [12].

Toren- en portaalkranen

Er zijn veel verschillende strategieën om een horizontale lastweg te bereiken. Bij portaal- en torenkranen is de baan van de *loopkat*, de rol die langs de kraanarm schuift, door de constructie al horizontaal. De horizontale verplaatsing van de last wordt dan bereikt door een kleine maar vernuftige truc. De kabel loopt niet alleen vanaf een vast beginpunt op de kraanarm over de loopkat naar de last maar ook via een rol terug van de last langs de loopkat naar het andere einde van de kraanarm. Op die manier hangt de last aan een lus die altijd even lang blijft zolang men niet de kabel verlengt of inkort.

Er bestaan ook constructies waar de last pas een horizontale baan beschrijft als de kabelrol langs een kromme beweegt die juist de kromme van de last vereffent zoals rechts in figuur 2 te zien is.

Verder zijn er ook intrekdraaikranen met een zogenaamde ellipssturing (ellipskranen, figuur 2) die een exact horizontale lastweg hebben en vele andere constructies meer (zie [3], [6], [11–13]).



Figuur 1 Een lemniscaat-, een balans- en een 'floating level-luffing' kraan

Hijskranen met lemniscaatsturing

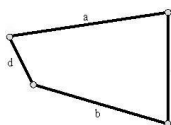
De hijskranen met lemniscaatsturing berusten allemaal op het *Doppellenkerwipprincipe*: een scharnierende stangenvierhoek met een vaste basisstang, waarbij de *koppelstang*, dat is de stang tegenover de vaste stang, tot kraanarm is verlengd. Dit mechanisme werd reeds in de jaren dertig door de ARDELTE Werke in Eberswalde (tegenwoordig KE Kranbau Eberswalde) ingezet (zie [20]). We zullen nu proberen om de bewegingspatronen van dergelijke hijskranen met lemniscaatsturing te begrijpen. We dienen daarvoor de bewegingspatronen van stangenvierhoeken te onderzoeken en we zullen zien dat ook de klassieke lemniscaat van Bernoulli als lastkromme ontstaat.

Stangenvierhoeken

Drie wederzijds aan elkaar verbonden stangen bewegen niet. De eerste scharnierende stangenvierhoek die voor beweeglijke mechanische constructies in aanmerking komt, wordt gevormd door vier stangen. Stangenvierhoeken zijn in alle mogelijke mechanismen terug te vinden, zoals in gazonsproeiers, busdeuren, vorkheftrucks en vele andere apparaten en toestellen (zie bijvoorbeeld [4]).

Eigenschappen van stangenvierhoeken

We zullen de notatie van de lengtes van een stangenvierhoek steeds zo kiezen dat voor de paren van tegenover elkaar liggende zijden en hun lengtes (a, b) en (c, d) geldt:



$$a + b \geq c + d \text{ en } a \geq b \text{ en } c \geq d.$$

Stangenvierhoeken zijn op een natuurlijke manier in klassen op te delen (zie bijvoorbeeld [4]):

- Een stangenvierhoek behoort tot klasse I als de kortste stang een volle draaiing rond een van zijn uiteinden kan maken, terwijl dit voor de andere drie stangen niet geldt. Voor deze klasse geldt dat $a - b < c - d$.
- Een stangenvierhoek behoort tot klasse II als geen enkele stang

een volle draaiing kan maken rond een van zijn uiteinden. Voor deze klasse geldt dat $a - b > c - d$.

Bij de grensgevallen met $a - b = c - d$, dat wil zeggen alle stangenvierhoeken die niet passen in klasse I of II, is de som van twee van de zijden gelijk aan de som van de twee overige zijden of een zijde is even lang als de andere drie bij elkaar. Een zulke stangenvierhoek die niet behoort tot klasse I of II noemen we een *doorslaande stangenvierhoek*.

Een aardige eigenschap die snel te bewijzen valt is dat voor de diagonalen van stangenvierhoeken het volgende geldt:

Stelling 1. *Het inproduct van de diagonaalvectoren van een stangenvierhoek is constant.*

Bewijs. Als notatie geven we de vier stangen aan met vier vectoren v_1, v_2, v_3 , en v_4 waarlangs men de vierhoek in deze volgorde kan doorlopen. Er geldt dan

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0. \quad (1)$$

Wij willen bewijzen dat

$$(v_1 + v_2) \circ (v_3 + v_4) = (v_1 \circ v_3) + (v_1 \circ v_4) + (v_2 \circ v_3) + |v_2|^2$$

constant is en doen dat door op te merken dat uit (1) volgt:

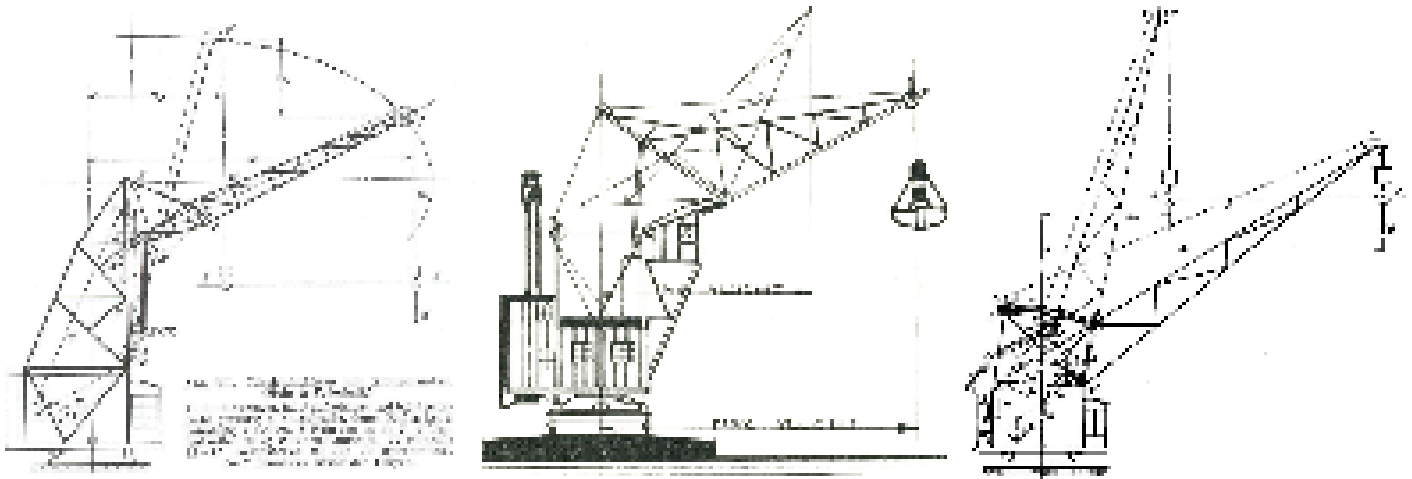
$$|v_4|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2((v_1 \circ v_2) + (v_1 \circ v_3) + (v_2 \circ v_3)).$$

□

Een interessant gevolg van deze stelling is: als bij één positie van de stangenvierhoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is dat voor elke positie het geval. Verder volgt eruit dat als het inproduct positief (negatief) is, tegenoverliggende scharnierpunten niet bij elkaar kunnen komen en de diagonalen in elke positie een scherpe (stompe) hoek met elkaar blijven vormen.

Lemniscaten

De lemniscaat is het symbool voor oneindig. Afbeeldingen van draken in een achtvorm die zichzelf verslinden, staan van ouds-



Figuur 2 Links: intrekdraakraan met ellipssturing (tekening uit [3]); midden: wipkraan uit [13] en rechts: intrekdraakraan met krommenbaan uit [3]

her voor het eeuwig terugkerende en zetten zich daarmee af tegen de christelijke symbolen A et Ω , die representeren dat de geschiedenis een begin en een einde kent.

De lemniscaatvorm als symbool oefende altijd al een grote fascinatie uit op mensen. Naast de bovengenoemde associatie bestaan er nog veel meer. Wij beperken ons hier tot de wiskunde van de lemniscaat.

De lemniscaat van Jacob Bernoulli

Hoewel de lemniscaat als kromme reeds door John Wallis (1616-1703) in zijn boek *Arithmetica Infinitorum* werd ingevoerd, wordt zij meestal verbonden met de naam Jacob Bernoulli (1654-1705), die er in het jaar 1694 een vergelijking voor heeft afgeleid.

De lemniscaat is gedefinieerd als de verzameling punten waarvan het product van de afstanden tot twee gegeven punten constant is. In formule: gegeven twee punten F_1 en F_2 in het vlak met afstand $2a$, dan is de lemniscaat de meetkundige plaats van alle punten P in het vlak waarvoor geldt

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2.$$

Als we poolcoördinaten (r, φ) in het vlak kiezen zodanig dat de oorsprong midden tussen F_1 en F_2 ligt, dan luidt de lemniscaatvergelijking:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi).$$

Ten opzichte van cartesische coördinaten waarin F_1 en F_2 de coördinaten hebben: $(-a, 0)$ en $(a, 0)$ hebben, wordt de lemniscaat beschreven door:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

terwijl in het complexe vlak de lemniscaat de representatie

$$z^2 \bar{z}^2 = a^2(z^2 + \bar{z}^2).$$

heeft.

Koppelkrommen

De stang tegenover de vaste basisstang van een stangenvierhoek

wordt *koppelstang* genoemd. Een punt in het vlak met een vaste positie ten opzichte van de koppelstang (een punt op de koppelstang is ook toegestaan), beschrijft een zogenoemde *koppelkromme* als de koppelstang gaat bewegen. Anders gezegd, dit punt en de koppelstang vormen op elk moment van de beweging een vaste driehoek waarbij het hoekpunt tegenover de koppelstang de koppelkromme beschrijft. Er zijn legio voorbeelden van mechanische constructies waar koppelkrommen een belangrijke rol spelen zoals bijvoorbeeld de voor de constructie van stoommachines door James Watt verzonden *Wattkrommen* en constructies voor het tekenen van (redelijk) rechte lijnen (zie de klassieker [8]). Zoals reeds eerder is opgemerkt: ze worden ook gebruikt voor het bereiken van een horizontale lastweg in hijskranen.

De verscheidenheid aan koppelkrommen is enorm. In de jaren vijftig vervaardigden Hrones en Nelson [5] een indrukwekkende atlas met ongeveer 10.000 koppelkrommen: een waar monnikenwerk.

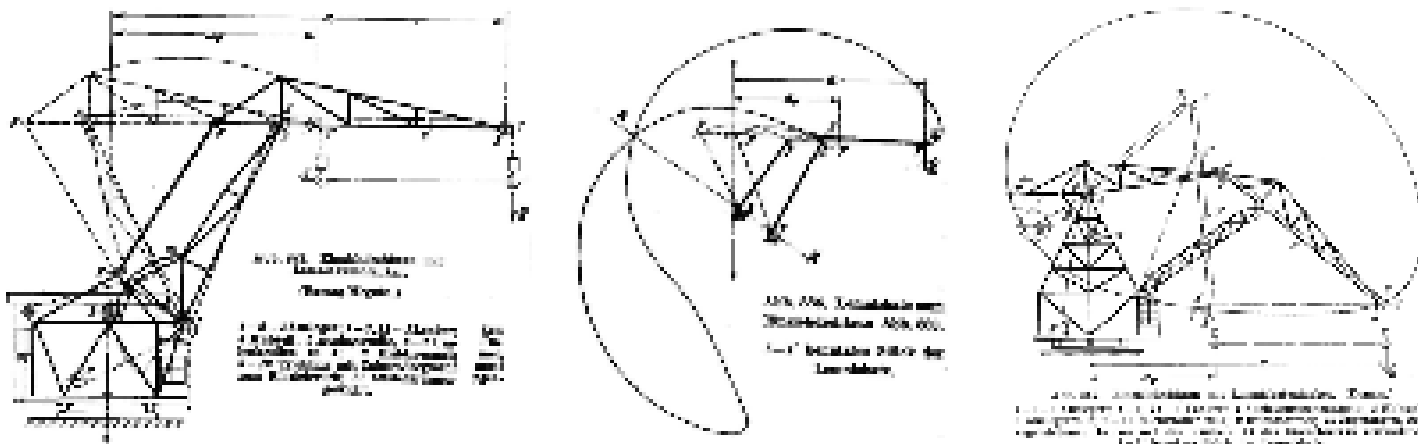
De wiskunde van koppelkrommen is verrassend rijk. Zie bijvoorbeeld [4] en [1]. Ter illustratie geven wij hier een eenvoudig resultaat dat ons inzicht geeft over welke koppelkrommen een dubbelpunt hebben, waar dit ligt, en welke niet. We volgen grotendeels [4], maar bewijzen een iets sterkere stelling.

Gegeven een koppelmechanisme met notatie zoals is afgebeeld in figuur 5, waarbij A , B en C niet op een lijn liggen. De *pivotcirkel* van dit koppelmechanisme is dan de cirkel door de punten M , Q en O waarbij O zo is gekozen dat $\triangle MQO$ gelijkvormig is met $\triangle ABC$ (zie figuur 5). Als A , B en C wel op een lijn liggen noemen we deze lijn de *pivotlijn*. (Het Franse woord 'pivot' betekent zoiets als draaipunt. In een koppelmechanisme zoals in figuur 5 worden er de punten M en Q mee bedoeld.)

Met behulp van deze definitie kunnen wij de volgende stelling bewijzen (zie figuur 5).

Stelling 2. Gegeven een koppelmechanisme met pivotcirkel. De dubbelpunten van de bijbehorende koppelkromme die met twee verschillende posities van de koppelstang kunnen worden bereikt zijn precies de punten waar de kromme de pivotcirkel snijdt.

Bewijs. Stel dat er een dubbelpunt op de pivotcirkel ligt. Dan zijn er twee posities van de driehoek aan de koppelstang: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ waarbij $C = C'$. Het vaste punt M moet nu ergens op



Figuur 3 Links: intrekdraaikraan met lemniscaatsturing uit [3]; rechts: intrekdraaikraan met krommenbaan uit [3]

de deellijn liggen van $\angle ACA'$. Evenzo moet Q op de deellijn liggen van $\angle BCB'$. Hieruit volgt dat $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement $180^\circ - \angle ACB$. Als wij nu bij gegeven M en Q kijken naar de meetkundige plaats van alle punten S waarvoor $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement van $\angle ACB$, dan vinden wij de pivotcirkel. Deze constructie kan moeiteloos worden omgedraaid om te bewijzen dat bij een punt van de koppelkromme op de pivotcirkel twee verschillende driehoeken en daarmee een dubbelpunt behoort. \square

De Bernouilllemniscaat als koppelkromme

De klassieke lemniscaat van Bernoulli kan op twee verschillende manieren ontstaan als koppelkromme. In figuur 6 schetsen wij deze constructies. De horizontale gestippelde lijnen zijn bij beide constructies vast en de andere drie lijnen zijn beweeglijke stangen. Tegenoverliggende zijden zijn even lang. De korte hebben lengte a en de lange, waarvan er één vast is, hebben lengte $\sqrt{2}a$. Links wordt de lemniscaat beschreven als meetkundige plaats van het middelpunt van de bewegende lange zijde. In de rechter constructie is de bovenste stang verlengd met een factor 2 en de lemniscaat is nu de meetkundige plaats van het losse eindpunt van deze stang.

Stelling 3. *Bij beide boven beschreven constructies is de koppelkromme gelijk aan de klassieke lemniscaat van Bernoulli.*

Wij bewijzen dat de constructie links de lemniscaat als koppelkromme levert. De constructie rechts laten we over aan de lezer.

Bewijs. Als wij de notatie uit figuur 5 overnemen, dan is te bewijzen dat geldt: $r_1 r_2 = \frac{1}{2}$. Voor het gemak zetten wij hier $a = 1$. Eerst merken wij op dat geldt: $\triangle F_1 AS \cong \triangle BAF_1$ want de verhoudingen $\frac{|F_1 A|}{|AB|}$ en $\frac{|AS|}{|F_1 A|}$ zijn gelijk. Om een zelfde reden is driehoek $\triangle ABF_2$ gelijkvormig met driehoek $\triangle SBF_2$ en daarom:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{1} \quad \text{en} \quad \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{r_2}{1}.$$

Bovendien volgt uit $\triangle F_1 AS \cong \triangle BAF_1$ ook dat $\angle ABF_1 = \angle BF_1 F_2$ gelijk is aan $\angle AF_1 S$. Zodoende vinden wij dat $\angle F_2 F_1 A = \angle BF_1 S$. Hieruit volgt $\triangle AF_2 F_1 \cong \triangle SBF_1$ en daarmee $\frac{x}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{y}$. Samen-gevat vinden we $r_1 r_2 = xy/2 = 1/2$. \square

De afbeelding van Darboux

De Franse wiskundige Gaston Darboux [1–2] publiceerde in het jaar 1879 een methode om aan een stangenvierhoek een projectieve derdegraadskromme over de complexe getallen te verbinden. De eigenschappen van deze kromme weerspiegelen de eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoek. Wij lichten hieronder zijn ingenieuze en verrassend eenvoudige constructie toe. Darboux gebruikte de toen nog jonge theorie over elliptische functies van Jacobi om er enkele meetkundige observaties over stangenvierhoeken uit af te leiden.

Wij representeren de stangen van een stangenvierhoek door vier vectoren in \mathbb{R}^2 met lengtes a, b, c, d die wij opvatten als vier complexe getallen $az_1, bz_2, cz_3, dz_4 \in \mathbb{C}$ waarbij $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en positief. Het feit dat een stangenvierhoek gesloten is, vertaalt zich naar de eis $az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 = 0$. Door complex te conjugeren verkrijgen we de twee vergelijkingen:

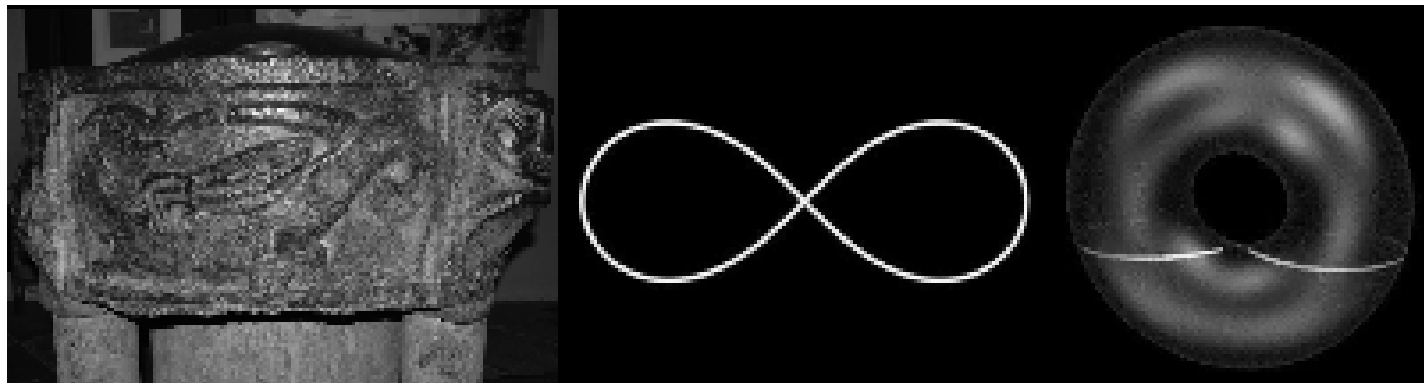
$$az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 = 0 \quad \text{en} \quad \frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_2} + \frac{c}{z_3} + \frac{d}{z_4} = 0. \quad (2)$$

We gebruiken hier dat voor een complex getal $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$ geldt: $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Als men de tweede vergelijking vermenigvuldigt met $z_1 z_2 z_3 z_4$ verkrijgen we een homogene derdegraadsvergelijking in vier variabelen. Als je wilt kun je de eerste vergelijking gebruiken om een variabele te elimineren en dan blijft er één homogene derdegraadsvergelijking over de complexe getallen in drie variabelen over. Kortom, de twee vergelijkingen beschrijven een complexe vlakke projectieve kromme. Wij noemen deze kromme de *Darbouxkromme* $D = D_{a,b,c,d}$ behorend bij de stangenvierhoek met lengtes a, b, c, d .

De posities van de stangenvierhoek komen nu dus overeen met projectieve punten van de vorm $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in \mathbb{P}^3$ die voldoen aan de vergelijkingen (2) en aan de eis:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

De rol van de vier variabelen is dezelfde. Deze kromme hoort bij alle stangenvierhoeken met zijden van lengte a, b, c, d , ongeacht de volgorde. Er zijn zes mogelijke volgordes van lengtes bij een stangenvierhoek. In [2] bespreekt Darboux de ambiguïteiten die hierdoor kunnen ontstaan. Dit komt neer op het onderscheid tussen de bij 'eigenschappen van stangenvierhoeken' behandel-



Figuur 4 Links: heidense afbeelding van een draak die zichzelf in de staart bijt uit het begin van de 13e eeuw: de vorm van een lemniscaat (in het dorpje Niel, Niederrhein). Rechts zien we dat de lemniscaat ook optreedt als doorsnijing met de torus waarbij de grote straal twee keer zo groot is als de kleine.

de klassen I en II van stangenvierhoeken. Opgemerkt zij dat er in het algemeen drie verschillende stangenvierhoeken zijn waarbij de verzameling van de lengtes gelijk is aan $\{a, b, c, d\}$.

Er zijn verschillende interessante eigenschappen van deze derdegraadskrommen die uiteraard corresponderen met eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoeken. Wij noemen:

Stelling 4. Gegeven een stangenvierhoek S met lengtes a, b, c, d en Darbouxkromme D . Dan is S doorslaand dan en slechts dan als D een singulariteit heeft.

Opmerking. Een vlakke complex-projectieve kubische kromme met een singulariteit bezit ofwel een rationale parametrisering (dat wil zeggen dat hij het beeld is van een algebraïsche afbeelding vanuit een projectieve lijn naar het projectieve vlak), ofwel valt uiteen in een gladde kegelsnede en een lijn, ofwel bestaat uit drie lijnen.

Bewijs. Eerst onderzoeken wij met een Lagrange multiplier wat het voor de vergelijkingen (2) betekent als D in een punt $Q := (w_1 : w_2 : w_3 : w_4)$ een singulariteit bezit. Hiervoor definiëren wij de rationale functies:

$$L(z_1, z_2, z_3, z_4) := az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4$$

en

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_2} + \frac{c}{z_3} + \frac{d}{z_4}.$$

Als wij F beperken tot de nulpuntsverzameling van L , dan is de afgeleide van F gelijk aan nul, precies daar waar de gradiënten van F en L een veelvoud van elkaar zijn. Dus er zal een complex getal λ bestaan met:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(Q) = \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i}(Q) \text{ voor } i = 1, 2, 3, 4.$$

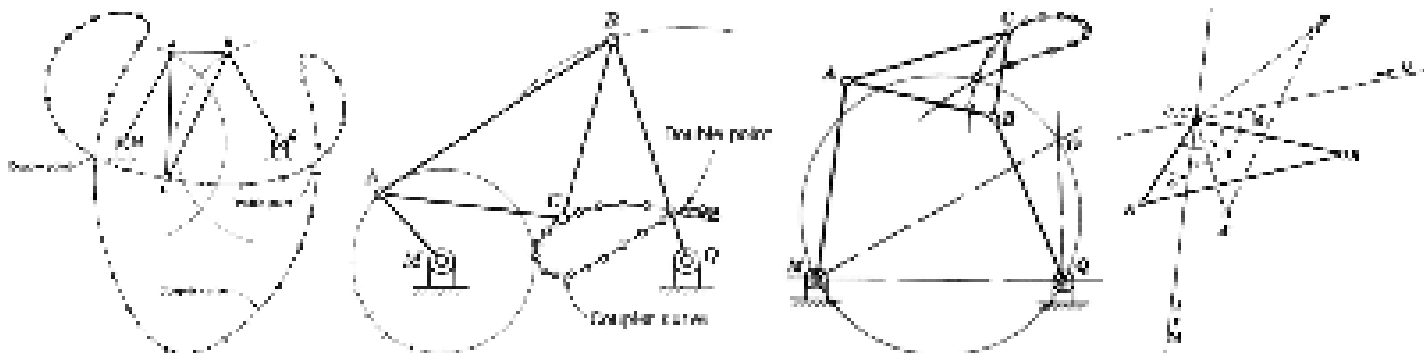
Als wij de afgeleides berekenen vinden wij de volgende vergelijkingen:

$$-\frac{a}{w_1^2} = \lambda a, \quad -\frac{b}{w_2^2} = \lambda b, \quad -\frac{c}{w_3^2} = \lambda c, \quad -\frac{d}{w_4^2} = \lambda d.$$

Hieruit volgt $w_1^2 = w_2^2 = w_3^2 = w_4^2$. Daarnaast geldt $L(Q) = 0$ en wij zien dat geldt $a \pm b \pm c \pm d = 0$ waarbij we de '+' en '-' tekens naar believen kunnen kiezen. Uit de eigenschappen voor klassen I en II genoemd in de paragraaf *Toren- en portaalkranen* kunnen we concluderen dat we hier niet te maken hebben met een stangenvierhoek uit één van beide klassen maar met een doorslaande stangenvierhoek. Verder blijkt dat het singuliere punt in \mathbb{P}^4 de gedaante $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ moet hebben.

Het omgekeerde geldt ook: een relatie van de vorm $a \pm b \pm c \pm d = 0$ impliceert dat D een singulariteit in het bijbehorende punt $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ heeft. \square

Opmerking. Het bewijs laat zien dat de enige mogelijke punten waar D een singulariteit kan hebben van de vorm $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1) \in \mathbb{P}^4$ zijn.



Figuur 5 Van links naar rechts: twee voorbeelden van koppelkrommen, definitie van een pivotcirkel en bewijschets bij Stelling 2 (alle uit [4])



Figuur 6 Links: twee constructies van de lemniscaat als koppelkromme. Slechts de helft van de koppelkromme is hier te zien: een halve lemniscaat en een halve cirkel. Rechts: notatie bij de constructies van de lemniscaat als koppelkromme

De beschrijving van stangenvierhoeken door middel van de Darbouxafbeelding geeft ook inzichten voor ingewikkeldere stangenconstructies. Zo wordt bijvoorbeeld in [6] met behulp van de Darbouxafbeelding bewezen:

Gegeven een stangenvierhoek met een vijfde stang die twee punten van de stangenvierhoek verbindt. Dan is deze stangenconstructie beweegbaar dan en slechts dan als de stangenconstructie een stangenparallelogram is waarbij de vijfde stang evenwijdig loopt aan twee van de vier stangen.

Dezelfde technieken kunnen ook worden toegepast om te bewijzen dat een koppelkromme nooit op een lijn kan lopen. Dit is geen vanzelfsprekendheid want bijvoorbeeld de beroemde stangenconstructie van Peaucellier (zie [8]) tekent inderdaad een kromme die op een lijn verloopt.

Hijskraanwiskunde als context

Tegenwoordig vindt er in Nederland in alle bèta-vakken een vernieuwing plaats van de leerinhouden voor het onderwijs op het havo/vwo. De vijf hiertoe ingerichte commissies hebben de slogan *context-concept* als gemeenschappelijke leidraad gekozen.

De voor vele mensen aansprekende context van hijskranen biedt een uitstekende omgeving om interessante wiskunde en natuurkunde (die hier achterwege is gebleven) in te bedrijven. Dit is bijvoorbeeld in verschillende onderwijsexperimenten en ook uit de diverse publicaties van de Meccano Gilde Nederland over dit onderwerp (zie bijvoorbeeld [14]) gebleken. Bij toren- en ellipskranen en andere constructies dienen zich vele voor leerlingen goed te doorgronden vragen aan ([16], [17], [18] en [7]).

Het blijkt echter ook dat men voor een zinvolle omgang met deze vragen reeds over behoorlijk veel wiskundige kennis en vaardigheid moet beschikken. Dit illustreert een problematisch aspect voor de inzet van deze context en relevante contexten in het algemeen. Een ander problematisch aspect is de eerlijkheid waarmee contexten worden gepresenteerd. Dergelijke wiskundige beschouwingen over hijskranen zijn niet altijd even relevant voor de werkelijke praktijk van kraanbouwers (zie [10]). Daar worden problemen anders geformuleerd en veel pragmatischer opgelost. Deze beschouwingen dienen eerder het intellectuele plezier van wiskundigen en geven aanleiding tot meetkundige vragen die volgens mij *an sich* al de moeite waard zijn. ←

Referenties

- 1 W. Blaschke, H.R. Müller 'Ebene Kinematik', Verlag von R. Oldenbourg, München, 1956.
- 2 M.G. Darboux, 'De l'emploi des fonctions hyperelliptiques dans la théorie de quadrilatère plan', /em Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Gauthiers-Villars (1879), Paris, pp. 109–128.
- 3 R.Hänchen, 'Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion', Verlag Julius Springer (1932), Berlin.
- 4 A.S. Hall, 'Kinematics and Linkage Design', Prentice-Hall, Inc. (1961), Englewood Cliffs, N.J.
- 5 J.A.Hrones, G.L. Nelson, 'Analysis of the Four-Bar Linkage, I and II', *The Technology Press of M.I.T. and John Wiley & Sons* 3 (1951), pp. 31–59.
- 6 R.H. Kaenders, 'Kranen en Lemniscaten', *De schijf van vijf*, Syllabus CWI vakantiecursus, 2005.
- 7 R.H. Kaenders, *Kräne und Lemniscaten, Beiträge zum Mathematikunterricht*, GDM Tagung, Osnabrück, 2006.
- 8 A.B. Kempe *How to draw a straight line*, National Council of Teachers in Mathematics, Classics in mathematics education (6), 1977.
- 9 G. Niemann, *Über Wippkrane mit waagerechtem Lastweg*, Dissertation Technische Hochschule Berlin, 1928.
- 10 G. Nieuwenhuis, 'De lemniscaatkraan', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vijfde serie 7(3) (2006).
- 11 K. Rüdiger, 'Einziehkrane mit waagerechter Lastbahn', *Fördertechnik und Frachtverkehr* XXIII(9) (1930), pp. 169–172.
- 12 Selter, 'Wippauslegerkrane mit horizontal bewegter Last', *Fördertechnische Rundschau* 2 (1927), pp. 28–31.(2005)
- 13 J.E. de Vries, *Hijswerktuigen*, Firma Ruijgrok & Co., Haarlem, 1929.
- 14 B. Vrugt, 'Van wagenkraan tot lemniscaat, deel I en II' *Meccano Nieuws* 16.1 en 16.2 (1998).
- 15 F. Westendorp, *Handboek voor werktuigkundigen*, Zevende druk van Bernoulli's vademecum, Van Holkema & Warendorf's Uitg. Mij., Amsterdam, 1927.
- 16 D. van Gemert, T. Wijnen, 'De Ellipskraan', vwo-profielwerkstuk, Pleincollege Eckart, Eindhoven, Cursus *Wiskundig denken*, Ratio, RU Nijmegen, 2003.
- 17 M. Hercules, J. van der Velde, *Hijskranen met een horizontale belastingsweg*, havo-profielwerkstuk, Canisius College Nijmegen.
- 18 J. Hoek, R. Balsem, *Lemniscat*, vwo-profielwerkstuk, Canisius College Nijmegen, 2004.
- 19 FIGEE crane building, Haarlem, www.fige.com.
- 20 KE Kranbau Eberswalde, www.kranbau-eberswalde.de.
- 21 Ratio Instituut en Internetmethode, lesmateriaal (14.4), www.ratio.ru.nl, Radboud Universiteit Nijmegen.
- 22 Wiskunde-B-dag, Dansende Stangen, www.fi.uu.nl/wisbdag, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2004.