Jacques Haubrich
Fontys Hogescholen
Postbus 347
5600 AH Eindhoven
j.haubrich@fontys.nl

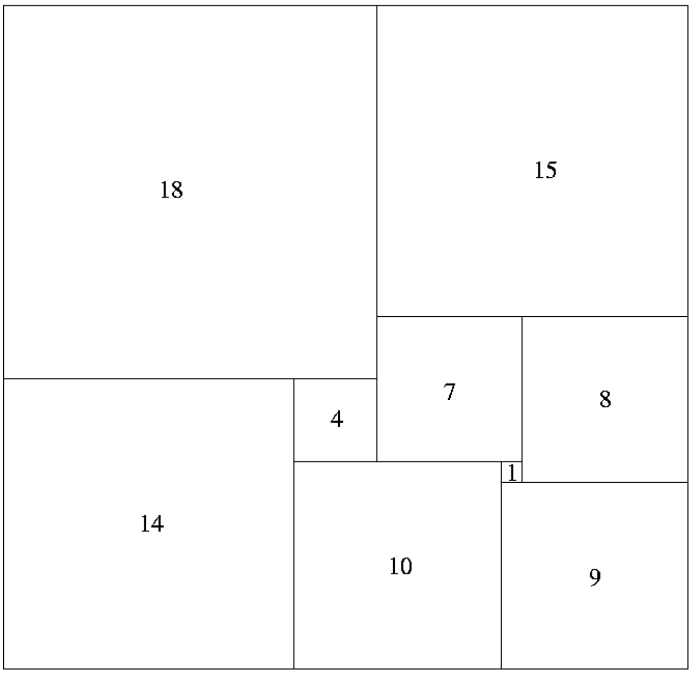
C.J. Bouwkamp en de Squared Squares

Het onderverdelen van een vierkant in kleinere vierkanten is een populair probleem waar vele wiskundigen aan hebben gewerkt. Met onder andere een artikel in Scientific American bracht Martin Gardner het probleem onder de aandacht van een breder publiek. De onlangs overleden prof.dr. C.J. Bouwkamp, aan wie in het vorige Nieuw Archief voor Wiskunde een In Memoriam is gewijd[1], heeft belangrijke bijdragen geleverd aan het onderzoek naar dergelijke vierkanten. Hij liet ruim dertig ordners vol papieren en een enorme stapel enveloppen na over het opdelen van rechthoeken in onderling ongelijke vierkanten. In dit artikel geeft Jacques Haubrich, docent aan Fontys Hogescholen te Eindhoven, een indruk van de geschiedenis van dit probleem en de rol die Bouwkamp daarin heeft gespeeld.

Vrijwel precies een eeuw geleden, namelijk in 1903, poneerde M. Dehn[2] de vraag of het mogelijk is, een rechthoek op niet-triviale wijze te verdelen in een eindig aantal elkaar niet-overlappende vierkanten. Dehn gaf geen oplossing maar bewees wel dat een dergelijke verdeling altijd zou resulteren in vierkanten met zijden die in rationele verhoudingen staan tot de zijden van de totale rechthoek. Pas in 1925 publiceerde Z. Moroń[3] de eerste oplossing. Hij verdeelde een rechthoek van 33×32 in negen ongelijke vierkanten zoals aangegeven in figuur 1.

De rechthoek is verdeeld in negen vierkanten. We spreken daarom van een verdeling van orde 9. Alle vierkanten zijn verschillend van grootte; de verdeling heet daarom perfect. Veel later werd pas bewezen[4–5] dat deze verdeling ook de perfecte verdeling is van de laagst mogelijke orde.

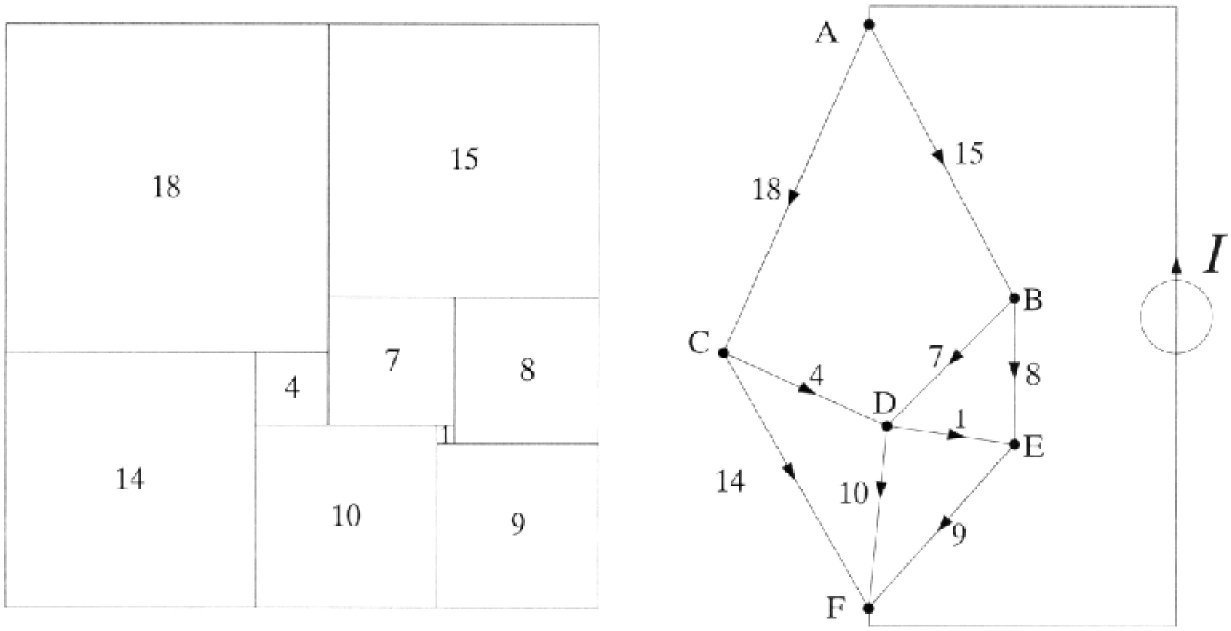
Het is dus niet mogelijk, een rechthoek te verdelen in minder dan negen ongelijke vierkanten. Een *vierkant* verdeeld in vierkanten was echter nog niet gevonden. Dat zou tot 1939 duren toen R. Sprague het eerste *perfect squared square* vond[6]. Het was echter een zogenaamde *Compound*, samengesteld uit vijf *perfect squared rectangles* plus vijf vierkanten. T.H. Willcocks vond in 1947 het eerste *Simple Perfect Squared Square*, van orde 37. Hij was ook lange tijd de recordhouder inzake het Simple Perfect Squared Square van de laagste orde, totdat Duijvestijn het vierkant van orde 21 ontdekte.



Figuur 1 De verdeling van Moroń.

Een oplosmethode

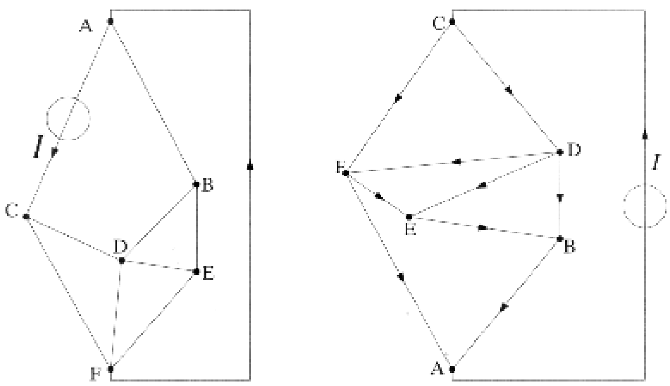
De grote doorbraak kwam in december 1940 met een artikel van Brooks, Smith, Stone en Tutte[4], die lieten zien dat een in vierkanten verdeelde rechthoek kan worden geassocieerd met de stromen in een weerstandsnetwerk dat aan een stroombron is aangesloten. Een rechthoek van homogeen materiaal, bijvoorbeeld koperplaat, met een perfect geleidende boven- en onderrand heeft namelijk een (Ohmse) weerstand die evenredig is met de hoogte van de rechthoek en omgekeerd evenredig met de breedte ervan. Dat betekent dat alle vierkanten van een dergelijk materiaal dezelfde weerstand hebben, die gemakshalve gelijk aan 1 Ω gesteld kan worden. We kunnen als gedachte-experiment de rechthoek van figuur 1 opgebouwd denken uit dergelijk materiaal en verdeeld



Figuur 2 Een rechthoekverdeling en het ermee corresponderende netwerk.

denken in 33 (de breedte van de rechthoek) verticale repen van 1 eenheid breed en 32 eenheden hoog. Elk van die repen heeft dan een weerstand van 32 Ω. Zetten we nu over boven- en onderrand een spanning van 32 V (volt), dan wel een stroombron van 33 A (ampère), dan zal door elke reep een stroom van 1 A lopen. Aangezien elk vierkant bestaat uit één of meer repen naast elkaar met uiteraard van elk van die repen het juiste gedeelte in de hoogte, zal door elk vierkant dus een stroom lopen van evenveel ampères als de breedte van dat vierkant en zal tevens de spanningsval in volts over het vierkant gelijk zijn aan de hoogte van het vierkant. Een in vierkanten verdeelde rechthoek heeft dus een elektrisch analogon: een netwerk bestaande uit weerstanden van 1 Ω die met elkaar zijn verbonden in knooppunten die overeenkomen met de horizontale lijnsegmenten in de rechthoekverdeling op plaatsen waar boven- of onderranden van vierkanten tegen elkaar komen. Ter verduidelijking zien we in figuur 2 de verdeling uit figuur 1 opnieuw, met ernaast het bijbehorende elektrische netwerk.

De weerstanden van 1 Ω in elke tak zijn eenvoudigheidshalve weggelaten. Bij een totale stroom $I = 33$ A zal door tak AC een stroom van 18 A lopen, door AB een stroom van 15 A, enzovoort. Elk knooppunt in het netwerk komt overeen met een horizontaal lijnsegment in de rechthoekverdeling, dus met de onder- en bovenranden van vierkanten. De polen A en F corresponderen met de boven- en onderrand van de rechthoek. In elk knooppunt komt 'van boven' evenveel stroom binnen als er 'naar onderen' weer uitgaat, dus dat de stroomsterktes kloppen, is gemakkelijk in te zien. Het kost wat meer moeite, deze stromen te berekenen als ze nog niet bekend zijn. Dat is mogelijk dankzij de wetten van Kirchhoff: volgens zijn eerste wet is in elk knooppunt de som van de binnenkomende stromen gelijk aan de som van de uitgaande stromen, en volgens zijn tweede wet is de som van de spanningen rond elke maas gelijk aan 0, hetgeen bij weerstanden van 1 Ω betekent dat de som van de stromen rond elke maas gelijk aan 0 is. Dat leidt voor het netwerk uit figuur 2 tot de volgende vergelijkingen:



Figuur 3 Een ander netwerk verkregen uit dat van figuur 2

$$
\begin{aligned}
\text{punt } A &: i_{AC} + i_{AB} = I \\
\text{punt } B &: i_{AB} = i_{BD} + i_{BE} \\
\text{punt } C &: i_{AC} = i_{CF} + i_{CD} \\
\text{punt } D &: i_{CD} + i_{BD} = i_{DE} + i_{DF} \\
\text{punt } E &: i_{DE} + i_{BE} = i_{EF} \\
\text{maas } ACDB &: i_{AC} + i_{CD} - i_{BD} - i_{AB} = 0 \\
\text{maas } CDF &: i_{CF} - i_{DF} - i_{CD} = 0 \\
\text{maas } BDE &: i_{BD} + i_{DE} - i_{BE} = 0 \\
\text{maas } DEF &: i_{DF} - i_{EF} - i_{DE} = 0.
\end{aligned}
$$

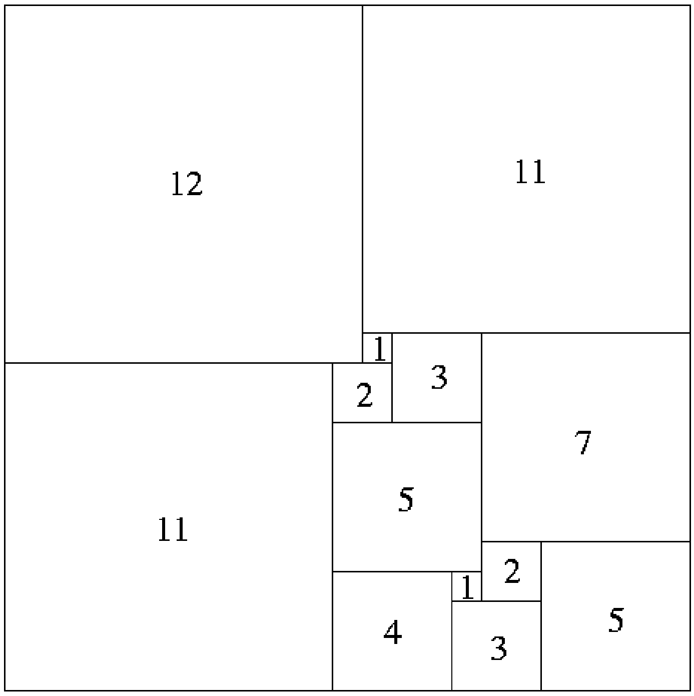
De vergelijking voor punt F is weggelaten: deze zou leiden tot een afhankelijk stelsel, hetgeen zowel wiskundig als vanuit electrische optiek eenvoudig valt in te zien. De gevonden 9 vergelijkingen bevatten precies 9 onbekenden en het stelsel valt als volgt te noteren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{AB} \\ i_{AC} \\ i_{BD} \\ i_{BE} \\ i_{CD} \\ i_{CF} \\ i_{DE} \\ i_{DF} \\ i_{EF} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voor een wiskundige is het dan niet moeilijk meer, hooguit onaangenaam, om hieruit de 9 onbekende stromen te bepalen, die dan telkens zoveel 33-ste van I blijken te zijn. Kies dus $I = 33\ A$ en alle stromen zijn precies de gehele getallen die in figuur 1 en figuur 2 staan aangegeven. Het is een aardige oefening, de spanningsbron uit tak AF te verwisselen met de weerstand uit tak AB: zie figuur 3-links. Na enige vervormen ziet het netwerk er dan uit als in figuur 3-rechts.

De pijlen in figuur 3 geven de positieve stroomrichtingen aan en bij berekening blijkt dat een totale stroom $I = 61\ A$ zich zal splitsen in $i_{CF} = 33\ A$ en $i_{CD} = 28\ A$. De rest van de berekening wordt aan de lezer overgelaten, evenals het tekenen van de bijbehorende in vierkanten verdeelde rechthoek. Door de stroombron in nog een andere tak te plaatsen, ontstaat weer een nieuwe berekening. Uit dit ene netwerk met in totaal 10 takken, kunnen dus (theoretisch) 10 verschillende verdelingen van rechthoeken in 9 vierkanten berekend worden. In dit geval ontstaan er overigens slecht 3 verschillende verdelingen die elk meermalen te voorschijn komen, veroorzaakt doordat er slechts 3 verschillende weerstandsnetwerken ontstaan.

Door alle mogelijke (planaire) netwerken (grafen met tenminste 3 takken per knooppunt) te tekenen en daarin achtereenvolgens de stroombron in elk van de takken te plaatsen en de daaruit voortkomende stromen te berekenen, krijgt men 'vanzelf' alle verdelingen van rechthoeken in vierkanten. Brooks, Smith, Stone en Tutte hebben dat gedaan en in hun artikel[4] beschreven. Ze deden dat voor alle netwerken met 13 of minder takken, netwerken dus die leiden tot een verdeling in 12 of minder vierkanten en ze

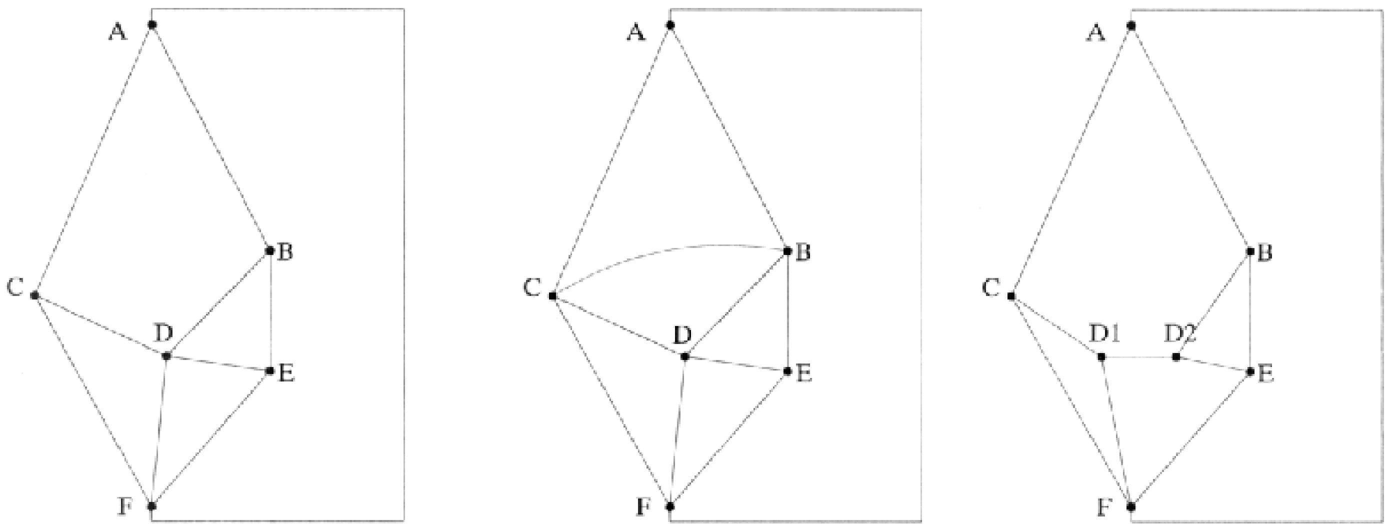


Figuur 5 Het eenvoudigste Simple Imperfect Squared Square.

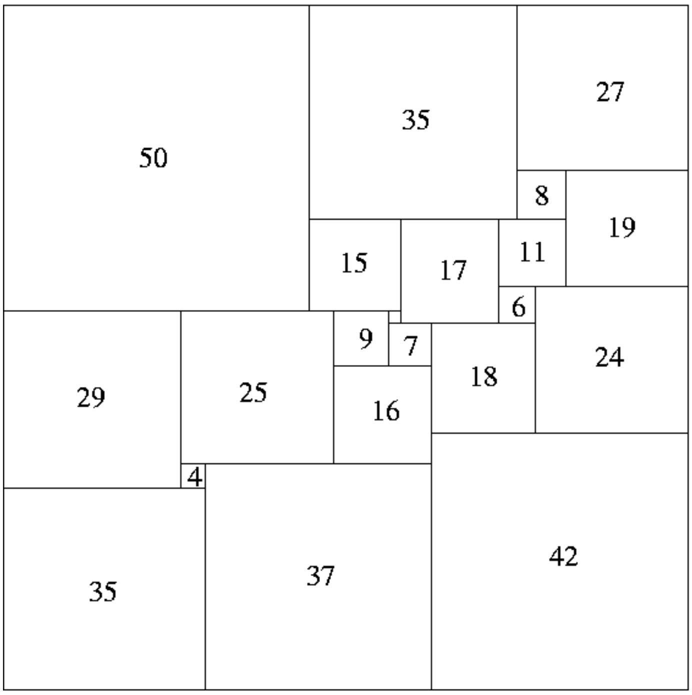
vonden 2 verdelingen van orde 9, 6 van orde 10, 22 van orde 11 en 67 van orde 12. Het moge duidelijk zijn dat één en ander nogal wat rekenwerk vereist. Daarnaast is er dan nog het probleem hoe men eerst nog alle denkbare planaire netwerken vindt.

Het genereren van netwerken

Uit bijvoorbeeld het netwerk van figuur 2, een netwerk van orde 10 (dus met 10 takken), kan men op 2 manieren komen tot een netwerk van orde 11. De ene manier is het onderling verbinden van twee knooppunten die nog niet verbonden zijn, bijvoorbeeld C en B, of A en E. De andere manier is het opsplitsen van een knooppunt met 4 of meer takken, zoals bijvoorbeeld punt F of punt D, in twee nieuwe knooppunten die met elkaar verbonden worden. Beide manieren staan geïllustreerd in figuur 4.



Figuur 4 De twee methoden voor het genereren van nieuwe netwerken.



Figuur 6 Het *Simple Perfect Squared Square* van orde 21.

In het algemeen kan men uit elk netwerk van orde n een aantal netwerken van orde $n+1$ maken door hetzij het toevoegen van nieuwe takken, hetzij het splitsen van knooppunten. Men ziet gemakkelijk in dat twee onderling verschillende netwerken van orde n toch eenzelfde netwerk van orde $n+1$ kunnen opleveren. Er ontstaan bij dit proces dus vele duplicaten, die geëlimineerd moeten worden. Het daartoe identificeren van netwerken en vaststellen dat twee netwerken duplicaten zijn, is verre van triviaal. Dat men op deze wijze inderdaad uit alle netwerken van zekere orde alle netwerken van een 1 hogere orde vindt, is overigens allerminst vanzelfsprekend. Sterker nog, van elke even orde is er precies één netwerk dat men op deze wijze niet vindt en dat dus apart moet worden toegevoegd. Het is voorts behoorlijk ingewikkeld, een en ander per computer uit te voeren.

Het werk van C.J. Bouwkamp

C.J. Bouwkamp was sinds 1941 in dienst bij het Natuurkundig Laboratorium van Philips en besteedde reeds in de oorlogsjaren een deel van zijn werktijd en vrije tijd aan het tekenen van netwerken en het berekenen van de stromen. Vele bladzijden aantekeningen, tekeningen en berekeningen alsmede een complete kaartenbak heeft hij in die jaren gevuld, in 1946 leidende tot een driedelige publicatie in de Proceedings van de KNAW[5]. Met eindeloos geduld en gigantisch veel rekenwerk (toen zelfs nog zonder zakjapanner!) heeft hij alle 63 netwerken met maximaal 14 takken afgeleid en uitgetekend en daaruit alle 213 verdelingen van orde 13 of minder gevonden en als 'nevenproduct' nog 34 imperfecte verdelingen, verdelingen waarin op niet-triviale wijze gelijke vierkanten voorkomen. Slechts in één geval vond hij een vierkant en wel van orde 13. Deze is weergegeven in figuur 5.

Helaas is deze verdeling imperfect: ze bevat twee vierkanten van 11×11 en ook enkele kleinere maten komen tweemaal voor. Maar het vierkant is wel *simple*, de verdeling bevat geen subrechthoek die zelf weer in vierkanten is verdeeld, laat staan twee gelijke vierkanten tegen elkaar.

Bouwkamp vond niet alleen deze bijzondere verdeling, hij ontwikkelde ook een codering voor rechthoekverdelingen. De verdeling van figuur 5 wordt in de naar hem genoemde Bouwkampcode genoteerd als

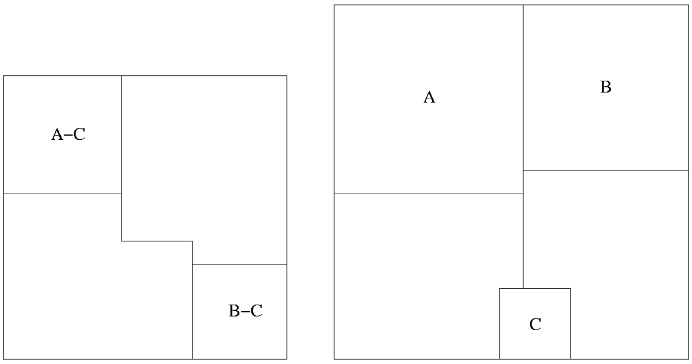
$$13:\ 33 \times 33\ (12,11)\ (1,3,7)\ (11,2)\ (5)\ (2,5)\ (4,1)\ (3).$$

Allereerst staat hier de orde van de verdeling, dan de afmetingen van de rechthoek en vervolgens de maten van de vierkanten in een vrij logische volgorde: van links naar rechts en dan van boven naar beneden, gescheiden door een komma als de vierkanten dezelfde bovenrand hebben en middels haakjes gegroepeerd per horizontaal lijnsegment. Daarbij geldt als basisregel dat de rechthoek zo getekend moet worden dat de langste zijde horizontaal is en dat het vierkant in de linkerbovenhoek niet kleiner is dan de andere hoekvierkanten.

Het moet een monnikenwerk geweest zijn, al deze 63 netwerken uit te tekenen en vervolgens bij elk een flink aantal stelsels van maximaal 13 (lineaire) vergelijkingen met evenzoveel onbekenden uit te schrijven en op te lossen. Er zijn wel methodes waarbij een deel van het rekenwerk vervallen kan of eenvoudiger kan op grond van een dosis inzicht, maar toch. Helaas dateerde Bouwkamp in die tijd zijn aantekeningen nog niet; we weten dus niet exact wanneer hij wat precies deed. Zijn kaartenbak gaat overigens nog door tot en met netwerken van orde 16 (waarvan er 249 zijn) waaruit rechthoekverdelingen van orde 15 te voorschijn komen. Gelet op Bouwkamps welhaast legendarische precisie lijkt het niettemin onwaarschijnlijk dat hij daarbij exemplaren over het hoofd heeft gezien. Zijn aantekeningen vermelden overigens niet álle rechthoekverdelingen; bij elk netwerk heeft hij wel minstens één verdeling berekend.

Op vierkantengebied was het daarna even rustig, tot het einde van de jaren vijftig toen bij Philips de eerste echte computers werden geplaatst. Een speciale rekengroep onder leiding van A.J.W. Duijvestijn werd in het leven geroepen en Bouwkamp was er als de kippen bij om de computer netwerken te laten genereren en verdelingen te laten berekenen. De eerste programma's werden ontwikkeld en uitgeschreven door Duijvestijn en P. Medema, in 1960 leidend tot publicaties[7–8] en in 1964 tot [14]. Toen Philips zijn eerste eigen computer, de voor die tijd uiterst snelle PASCAL, in 1961 operationeel had, werd de aanzienlijk grotere rekenkracht

Figuur 7 Het *Journal of Combinatorial Theory*



Figuur 8 Transformatietechniek I.

van deze machine ingezet om het allemaal nog enkele ordes verder te brengen en onder Bouwkamps supervisie leidde dat in 1962 tot de promotie van Duijvestijn[9], die daartoe alle netwerken tot en met orde 20 had gegenereerd en daarmee dus alle verdelingen van rechthoeken in vierkanten tot en met orde 19 had onderzocht. Daarbij bleken naast onderverdeelde rechthoeken uitsluitend imperfecte vierkantverdelingen te voorschijn te komen, verdelingen dus waarin een paar gelijke vierkanten voorkomt. Meer dan orde 20 was in die tijd niet goed mogelijk: de benodigde rekentijd kwam in de orde van de MTBF (Mean Time Between Failures) van de computer.

Duijvestijn, in 1964 benoemd tot hoogleraar aan de Universiteit Twente, ging aldaar door met het genereren van netwerken en het berekenen van verdelingen. In maart 1978 had hij succes met de ontdekking van de kleinste perfecte vierkantverdeling in 21 vierkanten, prompt gepubliceerd[10] en sindsdien hét sierend element van de omslag van het *Journal of Combinatorial Theory*. De Bouwkampcode luidt

$$21:\ 112 \times 112\ (50,35,27)\ (8,19)\ (15,17,11)\ (6,24)$$
$$(29,25,9,2)\ (7,18)\ (16)\ (42)\ (4,37)\ (33)$$

en de verdeling ziet er uit zoals in figuur 6 weergegeven.

De opsomming van alle perfect squared squares van orde 24 door Bouwkamp en Duijvestijn levert en passant de oplossing voor de ‘70^2 puzzel’. De vraag luidt: is het misschien mogelijk om een 70 vierkant te overdekken met vierkanten met zijde 1, 2, 3, 4, tot en met 24? er geldt namelijk dat

$$1^2 + 2^2 + ... + 24^2 = 70^2.$$

Het ontkennende antwoord werd in 1975 in *CACM 18* gepubliceerd door J.R. Bitner en E.M. Reingold.

Uiteindelijk kon Duijvestijn begin jaren 90 doorgaan tot en met verdelingen van orde 26 en onder de vele miljarden rechthoekverdelingen van die orde vond hij 441 vierkantverdelingen. De resultaten werden door Bouwkamp en Duijvestijn gepubliceerd in 1992[11] en in 1994[12]. Inmiddels zijn we weer 10 jaar verder en ondanks de exponentieel uit de hand lopende hoeveelheid rekenwerk zou het nu met de juiste computerkracht mogelijk kunnen zijn, weer twee of drie ordes verder te komen, maar een uitputtende berekening van álle *squared squares* blijft waarschijnlijk voor altijd ondenkbaar.

Transformaties

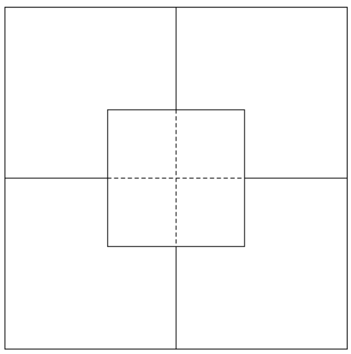
Naast Bouwkamp en het viertal Brooks, Smith, Stone en Tutte uit Engeland, waren enkele anderen in vierkantverdelingen geïnteresseerd, met name P.J. Federico, J.C. Wilson en T.H. Willcocks. In die groep waren vooral Bouwkamp en Federico op het idee gekomen van een aantal nieuwe methoden om *squared squares* te vinden: transformaties.

De linker tekening in figuur 8 stelt een *squared square* voor met totale lengte van een zijde $A + B - C$. We nemen aan dat het vierkant bestaat uit twee in vierkanten verdeelde zeshoeken plus twee vierkanten met zijde $A - C$, respectievelijk $B - C$. De twee zeshoeken vormen dan samen met drie nieuwe vierkanten met zijde A, B en C, een nieuw *squared square* van afmeting $A + B$, zoals weergegeven in de rechter tekening. De orde daarvan is dus 1 hoger dan de orde van de linkerverdeling. Een configuratie als in de linker tekening blijkt inderdaad herhaaldelijk voor te komen en levert dus telkens bijna ‘gratis’ een nieuwe vierkantverdeling op van een orde 1 hoger.

De genoemde onderzoekers hebben in de loop der jaren meer dan een dozijn van dergelijke transformaties gevonden en daarmee vele tientallen nieuwe vierkantverdelingen. Met name Bouwkamp ging er prat op, van de ordes 25 en 26 heel wat vierkantverdelingen met dergelijke transformaties te hebben gevonden vóórdat Duijvestijn ze per computer vond. Bouwkamp hield ook nauwkeurig bij wie, wanneer, middels welke transformatie, uit welke verdeling welke andere verdeling(en) had gevonden en gedurende ettelijke jaren was het een intellectuele wedstijd tussen diverse onderzoekers wie er het meeste kon vinden. Op dit moment zijn meer dan 1700 *perfect squared squares* bekend van orde 27 of hoger.

Bouwkamp ontving met Kerst 1996 een kaart van de amerikaan J.D. Skinner met daarop de tekening van een vierkant verdeeld in 104 vierkanten. Het was niet moeilijk daarin de structuur te herkennen zoals aangegeven in figuur 9.

De figuur is opgebouwd uit vier *squared squares* die handig bijeengezocht zijn. Het betreft namelijk een viertal dat na vergroting tot een zijdelengte die het kleinste gemene veelvoud is van de vier oorspronkelijke zijdelengten, een hoekvierkant bevat dat in alle vier dezelfde afmetingen heeft. Bij de juiste orientatie smelten die vier hoekvierkanten dan samen tot één nieuw vierkant in het midden van de totale figuur. Bouwkamp was gefascineerd, onderzocht meteen alle hem bekende vierkantverdelingen en vond niet minder dan 16 van dergelijke ‘Supersquares’, in orde variërend van 97 tot 108, waarover hij kort daarna, op 1 februari 1997, publiceerde[13]. Die waren voor hem niet zó moeilijk te vinden: hij beschikte immers over alle bekende *squared squares* en had meer dan voldoende programmeerervaring om deze met een zelfgeschreven programma te onderzoeken op de verhoudingen tussen de



Figuur 9 De structuur van Supersquares.

zijdelengten van de hoekvierkanten en de totale afmeting van dat squared square. De maten van de gevonden *supersquares* werden overigens wel geschreven met 9 cijfers!

Squared squares zijn inmiddels niet meer weg te denken uit de recreatieve wiskunde: W.T. Tutte[16] en Martin Gardner[15] schreven er artikelen over en P.J. Federico gaf een goed historisch overzicht in [17]. Een zoekopdracht op internet naar bijvoorbeeld *squared squares* of *squared rectangles* levert vele interessante links, waarbij de informatie natuurlijk niet altijd even betrouwbaar is.

Tot besluit

Het bovenstaande bevat een aantal niet geheel willekeurige grepen uit een levenslange zoektocht naar squared squares. Bouwkamp was niet tevreden toen hij in het begin van de veertiger jaren het eerste *simple squared square* (figuur 5) vond en hij was niet tevreden toen Duijvestijn in 1978 het kleinste *simple perfect squared square* van orde 21 vond. Hij wilde, en dat overigens niet alleen inzake het probleem van de vierkantenverdeling, altijd álle oplossingen hebben. Hij wilde ook zeker weten dat de resultaten kloppen. Hij analyseerde ze ook allemaal met de hand op bijzonderheden en kwam zo op het idee van vele transformaties waarmee hij weer andere vierkantverdelingen vond. Hij wilde weten of er regelmaat is en welke regelmaat er is in de aantallen vierkantverdelingen als functie van de orde, een tot dusverre onopgelost probleem. De voorgenomen studie van het enorme aantal door Bouwkamp nagelaten papieren zal ongetwijfeld nog de nodige interessante ontdekkingen opleveren inzake *squared squares* en wat daarmee samenhangt. De afronding daarvan zal nog wel enkele jaren op zich laten wachten.

Referenties

1 J. Boersma en A.T. de Hoop, 'In memoriam Christoffel Jacob Bouwkamp (1915–2003), Passie voor precisie', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5) **4** (3), p. 205–207 (2003)

2 M. Dehn, 'Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke', *Math. Annalen* **57**, p. 314–332, 1903.

3 Z. Moroń, 'O rozkładach prostokatów na kwadraty', *Przeglad Mat. Fiz.* **3**, p. 152–153, 1925.

4 R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, and W.T. Tutte, 'The dissection of rectangles into squares', *Duke Math. J.* **7** (1940), 312–340.

5 C.J. Bouwkamp, 'On the dissection of rectangles into squares I, II & III', *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.*, Amsterdam, **49**, 1176–1188 (1946); **50**, p. 58–71, p. 72–78 (1947).

6 R. Sprague, 'Beispiel einer Zerlegung des Quadrats in lauter verschiedene Quadrate', *Math. Zeit.* **45** (1939) 607-608

7 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, and P. Medema, *Catalogue of simple squared rectangles of orders nine through fourteen and their elements*, Technische Hogeschool, Eindhoven, May 1960, 50 pages.

8 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, and P. Medema, *Tables relating to simple squared rectangles of orders nine through fifteen*, Technische Hogeschool, Eindhoven, August 1960, 360 pages.

9 A.J.W. Duijvestijn, *Electronic computation of squared rectangles*, Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool, Eindhoven, 1962, 92 pages.

10 A.J.W. Duijvestijn, 'Simple perfect squared square of lowest order', *J. Comb. Theory B* **25**, p. 240–243 (1978)

11 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, *Catalogue of simple perfect squared squares of orders 21 through 25*, EUT Report 92-WSK-03, Technische Universiteit Eindhoven, November 1992.

12 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, *Album of simple perfect squared squares of order 26*, EUT Report 94-WSK-02, Technische Universiteit Eindhoven, December 1994.

13 C.J. Bouwkamp, *Preliminary report on supersquares*, Technische Universiteit Eindhoven, February 1997, 32 pages.

14 C.J. Bouwkamp, A.J.W. Duijvestijn, J. Haubrich, *Catalogue of simple perfect squared rectangles of orders 9 through 18, 12 volumes containing 154486 squared rectangles*, Philips Research Laboratories, Eindhoven, 1964, 3090 pages.

15 Martin Gardner, *Mathematical Carnival*, Penguin Press Science, 1990, hoofdstuk 11

16 Martin Gardner, *Second Scientific American Book of Math puzzles*, University of Chicago Press, 1987, hoofdstuk 17

17 P.J. Federico, 'Squaring rectangles and squares: A historical review with annotated bibliography', *Graph Theory and Related Topics*, Academic Press, 1979, p. 173-196