Nellie Verhoef
Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.C.Verhoef@utwente.nl

Nico Alink
Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.H.M.Alink@gw.utwente.nl

Onderwijs

Wo- en vo-docenten ontwerpen samen een onderzoeksles

Vakinhoudelijke en vakdidactische scholing voor docenten loopt al jaren niet soepel, dat is geen nieuws. Toch is er hoop. Schooloverstijgende vakgebonden professionalisering zit in de lift. Fysiek bij elkaar in de keuken van de lespraktijk kijken schept een band, stimuleert en is ook nog effectief. Nellie Verhoef en Nico Alink bespreken een veelbelovende scholingswijze.

Wiskundedocenten hebben het druk. Niet alleen met lesgeven maar ook met taken die dat lesgeven faciliteren zoals het mentoraat, projectleiderschap, of het coördinatorschap van een leerjaar of een afdeling binnen de school. Het is allemaal nodig om hoger ingeschaald te worden, dus meer te gaan verdienen. Vakinhoudelijke scholing staat op een laag tot zeer laag pitje omdat het zo weinig wordt gewaardeerd door schooldirecties. Toch zijn er docenten te vinden die ervoor gáán, docenten die plezier hebben in het bezig zijn met wiskunde samen met hun leerlingen.

Een veelbelovende manier om docenten te professionaliseren is het vormen van teams waarin behalve docenten ook medewerkers van een universiteit participeren. Rondom de Universiteit Twente bestaat er sinds het begin van het schooljaar 2009–2010 zo'n team, een Community of Learners (CoL). Een CoL is geen gewoon team. Van oorsprong is een CoL een onderzoeksnetwerk waarin de deelnemers samen onderzoek doen [2]. Dat betekent in Twente dat docenten wetenschappelijke literatuur (in de vorm van artikelen) lezen, elkaar over de inhoud informeren en op grond daarvan samen één theoretisch onderbouwd lesontwerp maken. Kenmerkend is dat alles in een sfeer plaatsvindt waarin de deelnemers naar elkaar luisteren, elkaar waarderen en respecteren. Aan de Twentse CoL nemen vijf eerstegraads docenten van vijf verschillende scholen deel, én vijf medewerkers van de UT: een docent van de afdeling Toegepaste Wiskunde, twee vakdidactici, een schoolpracticumdocent en een AIO. Elk lid heeft zo zijn eigen toegevoegde waarde.

Hoe wordt er in zo'n CoL idealiter gewerkt? Het doel is dat alle deelnemers zich professionaliseren, zowel vakinhoudelijk als vakdidactisch. Zij doen dat door onderzoeksactiviteiten uit te voeren die direct gekoppeld zijn aan de lespraktijk. Concreet ontwerpen docenten één les, voeren de les uit op hun eigen school en evalueren samen het verloop van de les achteraf. Daarnaast ontwikkelen de docenten onderzoeksinstrumenten en verzamelen, verwerken en analyseren data. Deze aanpak is die van *Lesson Study*, een professionaliseringsvorm die afkomstig is uit Japan, waar het een traditie heeft binnen het reken- en wiskundeonderwijs. Daar wordt het al tientallen jaren gezien als hét middel voor het ontwikkelen van de professionaliteit van docenten. Spannend is de observatie van de uitvoering van die ene les door collega's en andere geïnteresseerden [1, 3–4]. Dit zijn we in Nederland niet echt gewend — bovendien is dat moeilijk te organiseren.

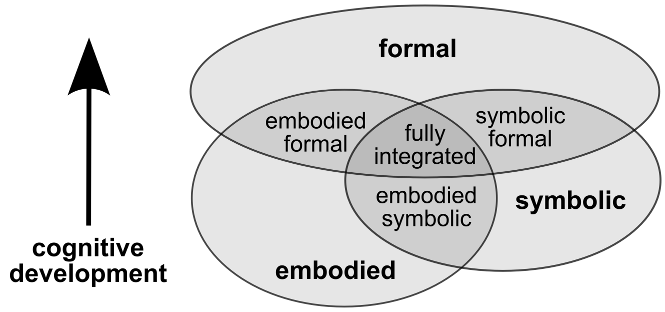
Waarop zijn die onderzoeksactiviteiten dan gericht? In Twente is gekozen voor 'het denken van leerlingen'. Hoe denken leerlingen nu eigenlijk? In de praktijk hebben docenten doorgaans nauwelijks tijd om hierbij stil te staan, ze reageren onmiddellijk op vragen van leerlingen. Op grond van hun ervaring gaan de docenten ervan uit dat ze wel weten wat de leerlingen bedoelen te vragen, zonder daar nog bij stil te staan. Tja, dat is ook ingewikkeld, want hoe doe je dat: blootleggen wat leerlingen denken — ze zitten in een groep tenslotte — om daar vervolgens adequaat op te reageren als docent?

Hoe is het dit schooljaar in de praktijk gegaan? Driewekelijks kwam de CoL op de universiteit bij elkaar om, in de periode tot eind december, één les te ontwerpen. In dit geval is gekozen voor de introductie van de afgeleide in 4vwo wiskunde B. Elke docent kreeg een wetenschappelijk artikel voor de kiezen, om dat vervolgens aan de anderen te presenteren. De volgorde van deze artikelen was: een algemeen theoretisch achtergrondartikel over het aanleren van wiskundige begrippen, een praktische uitwerking van het leren begrijpen van een vergelijking waarbij gewaarschuwd wordt voor pseudoconcepten, een artikel over het aanleren van het (voor leerlingen moeilijke) begrip 'limiet', één over de verschillende aspecten van de afgeleide en een laatste artikel over de betekenis van de visualisatie van wiskundige begrippen. Dit laatste artikel ging over het verband tussen een functie en zijn afgeleide. Het eventueel gebruik van ICT in de vorm van de

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

	Graphical	Verbal	Physical	Symbolic
Ratio				
Limit				
Function				

Tabel 1 Schema dat leerlingen helpt verschillende aspecten van een afgeleide te bepalen



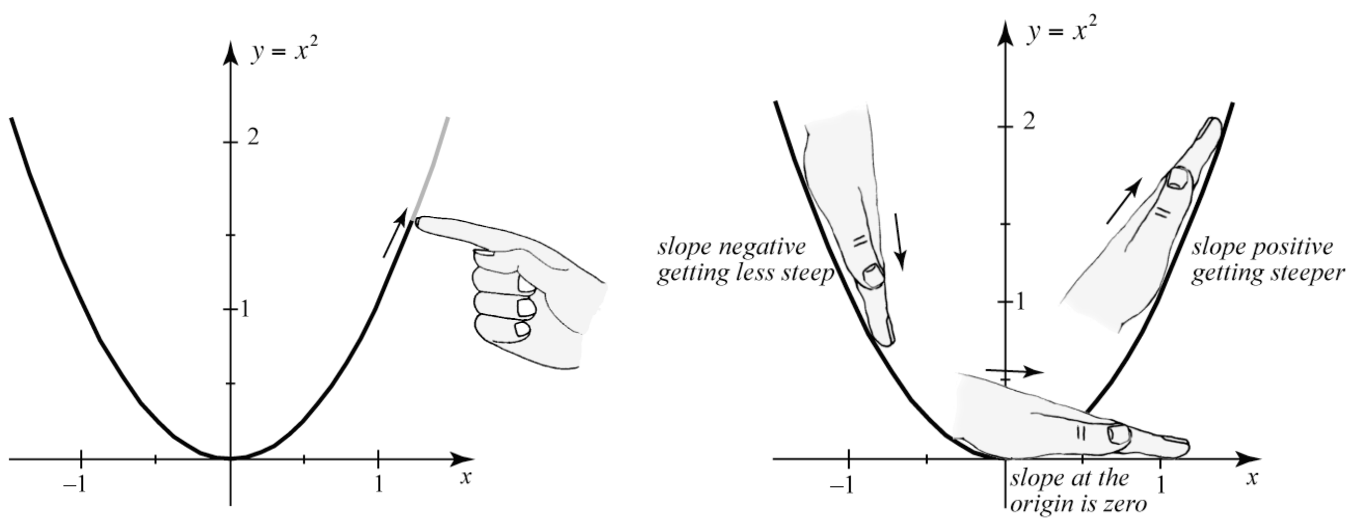
Figuur 1 De drie werelden van Tall: "Mathematicians live in three worlds building on met-befores, preferring different (combinations of) areas. A broad framework for mathematical thinking" [5].

GR kwam daarbij ook ter sprake. Om welke theorie gaat het hier dan? Algemeen bruikbaar leek het schema waarin de verschillende aspecten van de afgeleide te herkennen zijn. Dit schema (Tabel 1) is gebaseerd op de formele definitie van de afgeleide. Alle docenten bleken enthousiast te zijn: het schema is helder en praktisch, het leidt tot bewustwording over koppelingen (van rijen en kolommen) en over mogelijke misconcepties bij leerlingen. Dit schema past beter bij de benadering van het boek, waar ook het limietbegrip een uitgangspunt is, maar niet wordt genoemd. Dat wordt weggemoffeld. Nadenkend over de consequenties van dit schema kwam spontaan de vraag naar boven: Welk idee hebben 5vwo-leerlingen achteraf eigenlijk van de afgeleide? Een van de deelnemers aan de CoL heeft bij 41 leerlingen een korte enquête gehouden met de vraag: Wat is volgens jou de afgeleide? Daar is een breed scala aan antwoorden op gekomen variërend van "Een formule die de helling voor elk punt in de grafiek kan geven als je de x-waarde invult" en "Een hulpmiddel om de raaklijn te berekenen" en "De helling van een functie in een bepaald punt" tot "De snelheid waarmee de grafiek in een punt stijgt" en "Een functie, als je die differentieert, de functie die daar uit komt is de afgeleide". Al deze leerlingen hebben in 4vwo les gehad van dezelfde docent en toch hebben zij zich allemaal een eigen begrip gevormd van de afgeleide.

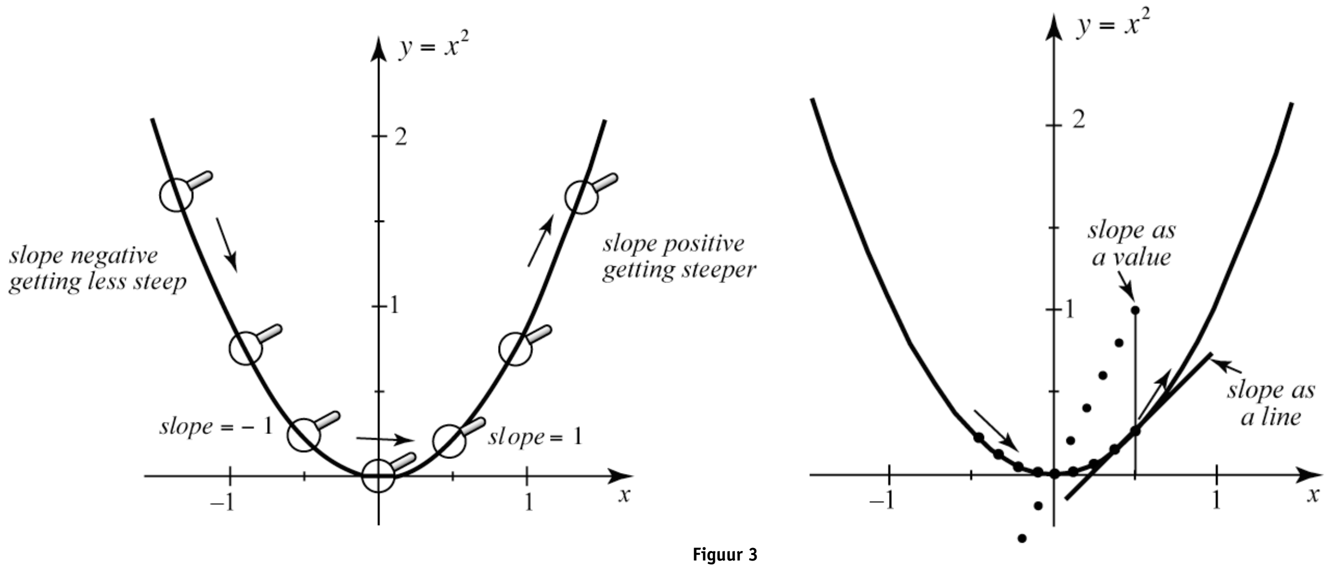
Wat kwam er in de bijeenkomsten zoal nog meer ter tafel? Drie werelden waar doorheen, volgens David Tall [5], een reis verloopt om een wiskundig concept te leren begrijpen. De drie werelden van Tall zijn kort te omschrijven als: (i) de *embodied world*, de meest laagdrempelige wereld van waarnemingen, zowel meetkundig als analytisch, als opstap naar de eigenschappen van objecten; (ii) de *symbolic world* van symbolen waarmee je rekent, (algebraïsch) manipuleert; en (iii) de *formal world* van definities, axioma's en logische bewijzen. In Figuur 1 is te zien hoe Tall deze hiërarchie tussen de drie werelden in beeld brengt. Op die reis spelen eerder verworven kennis (*set-befores*) en ervaring (*met-befores*) een rol. Zij kunnen het denken van leerlingen beïnvloeden. Deze set- en met-befores kunnen een belemmering zijn voor een goede begripsvorming. Een voorbeeld van een met-before is dat leerlingen in de natuurkundeles al eerder worden geconfronteerd met het begrip afgeleide, vaak in relatie tot het natuurkundige begrip snelheid. De natuurkundedocent verwacht van de leerlingen dat zij het concept afgeleide moeiteloos kunnen toepassen (Eindverslag van werkgroep afstemming wiskunde-natuurkunde, 2007). Leerlingen beheersen dan wel de procedure om de afgeleide te bepalen en te gebruiken, maar dat betekent nog niet dat ze het concept doorzien. Voor docenten is het dus van belang om rekening te houden met mogelijke set- en met-befores.

Hoe zien deze werelden eruit bij de introductie van het begrip afgeleide? De introductie van de afgeleide begint met het zorgvuldig kijken naar het verloop van een kromme, bijvoorbeeld de grafiek van $y = x^2$. Wat verandert er aan die kromme? Deze verandert lokaal voortdurend van richting (Figuur 2 links). Als je met je hand langs de kromme glijdt voel je de verandering van richting (Figuur 2 rechts). Als je voldoende inzoomt, met een loep bijvoorbeeld (Figuur 3 links), dan zie je uiteindelijk een rechte lijn. In elk punt van de grafiek kun je de richtingscoëfficiënt van die lijn bepalen en met een stip aangeven in de grafiek (Figuur 3 rechts). Dit alles speelt zich af in de *embodied world*. In de *symbolic world* is de richtingscoëfficiënt van die lijn, de raaklijn aan de kromme, te representeren als twee componenten dx en dy van een vector (Figuur 4).

Hoe hebben docenten zich nu geprofessio-

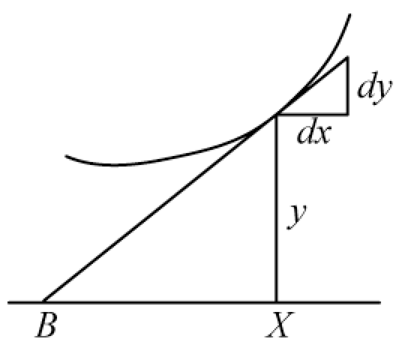


Figuur 2



Figuur 3

naliseerd? Het ontwerpen van een observatielijst bleek een lastig karwei te zijn. De drie werelden van Tall zijn gebruikt om interacties van leerlingen en docenten te classificeren. Steeds werd de vraag gesteld: hoe weet je nu hoe de leerlingen denken? Het beste zou natuurlijk zijn om gebruik te maken van hard-op-denk-protocollen, maar daar leent een klassikale les zich niet voor. Uiteindelijk is besloten om observatoren met een blanco papier de les bij te laten wonen. Van hen werd verwacht dat zij zelf de gemaakte opmerkingen noteerden en nadien zouden classificeren. Maar wat bleek? Bij de eerste uitvoering van de ontworpen les stelden leerlingen geen vragen. De docent had zijn les zó goed voorbereid dat alle eventuele vragen vooraf ingebakken waren. Dat was nu ook niet de bedoeling! Wel bleek dat leerlingen problemen hadden met het begrip raaklijn. Als reactie werd unaniem besloten een criteriumlijst te ontwerpen om antwoorden van leerlingen op schriftelijke vragen van de docent tijdens de les te classificeren. Wat bleek? Leerlingen denken totaal anders dan vermoed.



Figuur 4 Bij deze opbouw staat de grafiek centraal.

Hoe denken leerlingen dan? De aanpak van ‘local straightness’ bleek totaal niet aan te sluiten bij de aanpak van het boek met de nadruk op steeds kleiner wordende differentiequotiënten zonder over de limiet te praten; dat is in de praktijk lastig. Na de eerste les was het idee ontstaan dat er al eerder problemen zijn met het begrip raaklijn. Na de derde uitvoering van de les bleek dat leerlingen inderdaad problemen hebben met de vertaling tussen verschillende representaties van het begrip raaklijn: de analytische en de algebraïsche. Zo zijn er leerlingen die in één punt van een grafiek meer dan één raaklijn kunnen tekenen, terwijl zij zich er tegelijkertijd van bewust zijn dat er volgens de formule slechts één uitkomst kan zijn: hoe zit dat? Leerlingen gaven op geen enkele manier aan dit vreemd te vinden.

Al met al heeft deze *Lesson Study*-benadering docenten bewust gemaakt van het verschil tussen dat wat leerlingen denken en de voorstelling die een docent daarvan heeft. Het blijft toch oppassen geblazen als je lesgeeft! Dat maakt van het lesgeven natuurlijk wel een boeiend beroep. Deelnemende docenten hebben deze eerste serie CoL-bijeenkomsten als zeer aangenaam en verrijkend ervaren. Dat is niet in de laatste plaats te danken aan de omstandigheid dat daar tijd en gelegenheid is om uitgebreid met elkaar over (vak)didactische zaken van gedachten te wisselen.

Referenties

1 Baba, T. (2007). Japanese education and Lesson Study: An overview. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), Japanese Lesson Study in mathematics: It’s impact, diversity and potential for educational improvement. Singapore: World Scientific Publishing.

2 Brown, A. L., & Campione, J. C. (1996). Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems. In L. Schauble and R. Glaser (Eds.), Innovation in learning: New environments for education, 289-325. Mahwac, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

3 Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning. Mahwah, NJ: Erlbaum.

4 Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

5 Tall, D. O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5-24.