UWC Universitaire Wiskunde Competitie

Opgave A

Zij driehoek ABC gelijkzijdig en zij P een punt op de omgeschreven cirkel.
Definieer $p_1 = |PA|$, $p_2 = |PB|$, $p_3 = |PC|$. Toon aan dat

- $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$
- $p_1^4 + p_2^4 + p_3^4$

onafhankelijk zijn van de keuze van het punt P.

Opgave B

Een functie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ wordt een *veeltermbijectie* genoemd indien voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

1. f is een bijectie.
2. f wordt uitgedrukt door middel van veeltermfuncties, dat wil zeggen

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

   voor zekere polynomen (veeltermen) $p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $1 \le i \le n$.
3. De inverse functie f^{-1} wordt ook uitgedrukt door middel van veeltermen.

De verzameling $V(\mathbf{R}^n)$ van alle veeltermbijecties van $\mathbf{R}^n$, voorzien van de bewerking $\circ$ (samenstellen van functies), vormt een groep. De graad $\deg(f)$ van een veeltermbijectie f is het maximum van de graden van de veeltermen p_i ($1 \le i \le n$) waarmee f wordt uitgedrukt.
Gevraagd:

a. Wat is $V(\mathbf{R}^1)$?
b. Geef een voorbeeld van een injectief groepsmorfisme $\varphi : (\mathbf{R}\backslash\{0\}, \cdot) \to (V(\mathbf{R}^2), \circ)$ zó, dat er een $r \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ bestaat met $\deg(\varphi(r)) > 1$.
c. Geef een voorbeeld van een groepsmorfisme $\psi : (\mathbf{Z}, +) \to (V(\mathbf{R}^2), \circ)$ zó, dat $\forall M \in \mathbf{N}$ $\exists z \in \mathbf{Z}$ met $\deg(\psi(z)) \ge M$.

Opgave C

Bij een priemgetal $p \ge 3$ definiëren we een functie $\chi_p : \mathbf{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ door middel van

$$\chi_p(a) := \begin{cases} \left(\frac{a}{p}\right) \text{ als } p \nmid a, \\ 0 \text{ als } p \mid a, \end{cases}$$

waarbij $\left(\frac{a}{p}\right)$ het welbekende Legendre-symbool is. Verder definiëren we voor $m, n \in \mathbf{N}$: $s(m) := \sum_{a=0}^{m} \chi_p(a)$ en $S(n) := \sum_{m=0}^{n} s(m)$. Toon aan:

a. $S\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+3}{6} \cdot s\left(\frac{p-1}{2}\right)$ als $p \equiv 3 \pmod 8$;
b. $S\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{p+1}{2} \cdot s\left(\frac{p-1}{2}\right)$ als $p \equiv 7 \pmod 8$.

Ster-opgave

In deze opgave gebruiken we de notatie van Opgave C. Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

a. Als $p \equiv 1 \pmod 8$ dan is, met $q := \frac{p-1}{8}$, $s(2q) + s(3q) = s(q)$.
b. Als $p \equiv 3 \pmod 8$ dan is, met $q := \frac{p-3}{8}$, $s(q) + s(3q+1) = s(4q+1)$.
c. Als $p \equiv 5 \pmod 8$ dan is, met $q := \frac{p-5}{8}$, $s(q) + s(2q+1) = s(3q+1)$.
d. Als $p \equiv 7 \pmod 8$ dan is, met $q := \frac{p-7}{8}$, $s(q) + s(3q+2) = 2s(2q+1)$ en $s(2q+1) = s(4q+3)$.

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is een ladderwedstrijd voor studenten, georganiseerd in samenwerking met de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven worden tevens gepubliceerd op de internetpagina http://academics.its.tudelft.nl/uwc

Ieder nummer bevat de ladderopgaven A, B, en C waarvoor respectievelijk 30, 40 en 50 punten kunnen worden behaald. Daarnaast zijn er respectievelijk 6, 8 en 10 extra punten te winnen voor elegantie en generalisatie. Per nummer worden twee prijzen van 100 Euro toegekend: één aan de aanvoerder van de ladder (die daarna weer onderaan begint), en één aan de inzender van de oplossing die de meeste punten behaald heeft (die dan geen punten voor de ladder krijgt). Daarnaast zal twee maal per jaar een ster-opgave worden aangeboden waarvan de redactie geen oplossing bekend is. Voor de eerst ontvangen correcte oplossing van deze ster-opgave wordt eveneens 100 Euro toegekend.
Groepsinzendingen zijn toegestaan. Elektronische inzending in LaTeX wordt op prijs gesteld. De inzendtermijn voor de oplossingen sluit op 1 november 2000. Voor de ster-opgave geldt een inzendtermijn van een jaar.

Eindredactie: Jan van Neerven
Redactieadres: Universitaire Wiskunde Competitie
Vakgroep Toegepaste Wiskundige Analyse
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
j.vanneerven@its.tudelft.nl

UWC oplossingen

Editie 2000/1

De eerste ronde (editie 2000/1) van de Universitaire Wiskunde Competitie nieuwe stijl leverde 22 inzendingen op. De verhouding Nederlandse : Vlaamse inzendingen was ongeveer 1 : 2. Winnaar is het team *Johan Bosman* en *Ronald van Luijk* (Universiteit Utrecht), dat maar liefst $3 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 10 = 120$ punten behaalde. Zij verdienen de eerste editieprijs van 100 Euro en krijgen geen punten voor de ladder.

Zie pagina 306 voor een gedeelte van de ladderstand. De volledige uitslag is te vinden op de UWC website (http://academics.its.tudelft.nl/uwc). Vanaf Editie 2000/2 wint de koploper van de ladder eveneens een prijs van 100 Euro en begint vervolgens weer onderaan.

Opgave 2000/1-A Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een functie met de volgende eigenschappen:

(i) f is differentieerbaar op $(0,1)$;
(ii) f is continu in de punten 0 en 1 ;
(iii) $f(0) = 0$;
(iv) $0 \leq f'(x) \leq f(f(x))$ voor alle $x \in \big(0,1\big)$.

Toon aan dat f dan constant $\big(\equiv 0\big)$ is.

Johan Bosman en Ronald van Luijk vonden de volgende generalisatie, die aantoont dat we de eis $f' \geq 0$ kunnen laten vallen. In hun bewijs hebben ze echter wel een andere, zwakkere aanname op f' nodig. De volgende variant van hun redenering vermijdt dit.

Oplossing (Johan Bosman & Ronald van Luijk)
Daar f continu is op de gesloten en begrensde verzameling $[0,1]$, neemt f een maximum aan in een zeker punt $c \in [0,1]$, zeg $f(c) = M$. Dan geldt $0 \leq M \leq 1$, want f beeldt af in $[0,1]$. Stel nu dat $f \not\equiv 0$. Dan is $M > 0$ en daar $f(0) = 0$ is ook $c > 0$. Nu is naast f ook de samenstelling $f \circ f$ continu, en $f(f(0)) = f(0) = 0$. Er is dus een $\delta \in (0,c)$ met $f(f(x)) < M/2$ voor alle $x \in [0,\delta)$. Wegens $f'(x) \leq f(f(x))$ volgt dat f' naar boven begrensd is op $(0,1)$ met bovengrens M, want $f(f(x)) \leq M$ voor alle $x \in (0,1)$; op $(0,\delta)$ is $M/2$ een bovengrens voor f'. Met behulp van de Middelwaardestelling en de continuiteit van f op $[0,1]$ vinden we dan

$$M = f(c) = (f(c) - f(\delta)) + (f(\delta) - (f(0)) \leq M(c-\delta) + M\delta/2 < M,$$

een tegenspraak.

Opgave 2000/1-B Een rechthoekige driehoek wordt verdeeld in twee nieuwe (gelijkvormige) rechthoekige driehoeken door het neerlaten van de loodlijn uit de rechte hoek op de hypothenusa (stap 1). We doen hetzelfde met elk van de twee verkregen rechthoekige driehoeken, waardoor er dus vier rechthoekige driehoeken zijn ontstaan (stap 2). In elke nieuwe rechthoekige driehoek blijven we dit procédé toepassen, tot we in totaal tien maal een stel nieuwe driehoeken hebben gevormd (stap 10). Hoe groot is het totale aantal driehoeken waarvan de rand geen enkel punt gemeen heeft met de rand van de oorspronkelijke driehoek, dat in het verloop van de tien stappen is geconstrueerd?

Oplossing (Johan Bosman & Ronald van Luijk)
Met de hand gaan we na dat er in de eerste twee stappen geen driehoeken ontstaan die aan de gestelde eisen voldoen. Voor $n \geq 3$ redeneren we als volgt. Omdat het gevraagde aantal driehoeken onafhankelijk is van de vorm van de rechthoekige driehoek kunnen we een gelijkbenige rechthoekige driehoek nemen. Dan hebben alle kleine driehoekjes dezelfde oppervlakte. Met volledige inductie vinden we dat deze kleine driehoekjes in de volgende configuratie liggen, gesplitst naar n even en n oneven. Voor even $n = 2k$ vormen de driehoekjes die geen punt gemeen hebben met de oorspronkelijke driehoek een grote driehoek waarvan de lengte $2^k - 4$ keer zo groot is als de kleine driehoekjes met tegen de hypothenusa nog $2^k - 4$ kleine driehoekjes. In totaal zijn dit dus $(2^k - 4)^2 + (2^k - 4) = 2^n - 7 \cdot 2^k + 12$ driekoekjes. Voor oneven $n = 2k + 1$ vormen

UWC oplossingen

de kleine driehoekjes die geen punt gemeen hebben met de oorspronkelijke driehoek een grote driehoek waarvan de lengte $\sqrt{2}(2^k-3)$ keer zo groot is als de kleine driehoekjes met tegen beide rechthoekszijden nog 2^k-3 kleine driehoekjes. In totaal zijn dit dus $(\sqrt{2}(2^k-3))^2+2(2^k-3)=2^n-10\cdot 2^k+12$ driehoekjes. Dit levert dit na 10 stappen 1416 driehoekjes op — zie de onderstaande tabel.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aantal Δ's in de n-de stap	0	0	0	0	4	20	60	156	364	812
totaal na n stappen	0	0	0	0	4	24	84	240	604	1416

Opgave 2000/1-C Laat p een priemgetal zijn en laat $\nu \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$. Veronderstel dat x, y, $z \in \mathbf{N}\backslash\{0\}$ voldoen aan:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{p}$$

en

$$x+y+z=2\nu p,$$

waarbij noch $x-p$, noch $y-p$, noch $z-p$ deelbaar is door p^3.
Bepaal alle drietallen (x,y,z).

René Pannekoek stuurde een oplossing met een elegant tweede deel. Johan Bosman en Ronald van Luijk vonden een interessante generalisatie. Deze is vrij ingewikkeld en zullen we hier niet weergeven. We vermelden in plaats daarvan een gevolg ervan:

Gevolg Zij p een priem en laat $x,y,z \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ voldoen aan

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \text{en} \quad p \mid (x+y+z), \quad p^3 \nmid (x-p), \quad p^3 \nmid (y-p), \quad p^3 \nmid (z-p).$$

Dan geldt (na eventuele permuatie van x, y en z) dat $(x,y,z)=(3p,3p,3p)$, $(2p,4p,4p)$, $(2p,3p,6p)$ of $(p,kp,-kp)$ voor een $k \in \mathbf{Z}_{>0}$.

Oplossing
Eerst wordt aangetoond dat onder de voorwaarden gesteld in de opgave, alle drie de getallen x, y en z deelbaar moeten zijn door p. Zodra dit gebeurd is, dienen enkel nog de oplossingen van

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1,$$

waarbij a, b en c even natuurlijke getallen zijn, te worden gevonden. De enige oplossing hiervan is $a=2$, $b=c=4$ en permutaties hiervan.

Ster-opgave 2000/1 Laat $a(n)$ het aantal manieren zijn om een n bij n matrix te vullen met nullen en enen zó, dat er nergens twee enen naast of boven elkaar staan. Dus $a(1)=2$, $a(2)=7$, $a(3)=63$, enzovoort.
(i) Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} (a(n))^{1/n^2}$$

bestaat.
(ii) Vind zo goed mogelijke ondergrenzen en bovengrenzen voor deze limiet.

Tot dusver ontvingen we 8 inzendingen. Veel deelnemers vonden een correct bewijs voor het bestaan van de gewenste limiet κ. Zoals echter door Bosman en van Luijk werd opgemerkt, staat κ bekend staat als de 'hard square entropy constant' uit de statistische mechanica. Veel artikelen zijn reeds geschreven om κ te benaderen. In een van deze arti-

UWC oplossingen

kelen, een manuscript van R. Baxter getiteld 'Planar lattice gases with nearest-neighbout exclusion', wordt κ *bepaald tot 43 decimalen:*

$$\kappa = 1.5030480824753322643220663294755536893857810\ldots$$

Het bewijs voor de correctheid van deze decimalen ontbreekt echter. Bewezen onder- en bovengrenzen voor κ *zijn bijvoorbeeld* $1.503047782 < \kappa < 1.5035148$*, zie N.J. Calkin en H.S. Wilf, 'The number of independent sets in a grid graph' van Calkin en Wilf, SIAM J. Discrete Math.* **11** *(1998), 54–60. De beste onder- en bovengrens gevonden in de inzendingen zijn respectievelijk* $1.47243\ldots$ *en* 1.50954 *(beide door Matthijs Vogelzang).*

Dit alles in overweging nemende heeft de beoordelingscommissie besloten vooralsnog geen prijs toe te kennen. Wel heeft ze aan de tot dusver ontvangen inzendingen cijfers toegekend. Op de schaal van 1 tot 12 staat Matthijs Vogelzang bovenaan met 9 punten; het volledige overzicht is te vinden op de UWC website.

Ladderstand Universitaire Wiskunde Competitie na één ronde (bovenste tien)

De weging van de opgaven is 3 : 4 : 5.
Bij gelijk puntenaantal is alfabetisch gerangschikt.

	Naam	*Score 1*	*Score 2*	*Score 3*	*Totaal*
1.	Remke Kloosterman	9	8	8	99
2.	René Pannekoek	8	8	8	96
	Filip de Smet	8	8	8	96
	Mark Veraar	8	8	8	96
3.	Steven Lippens	9	8	7	94
	Bart Rodrigues e.a.	9	8	7	94
4.	Matti de Craene	8	7	8	92
5.	Joost de Heer	8	8	7	91
	Bram Minnaert	8	8	7	91
	Stijn Symens	8	8	7	91