Problemen | Problem Section

Edition 2006/3

For Edition 2006/3 we received submissions from N. Hekster, Jinbi Jin, C.Jonkers, R.A. Kortram, and Peter Vandendriessche. The solution of problem 2006/3-C will be published in the June issue.

Problem 2006/3-A Evaluate
$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Solution This problem was solved by Jinbi Jin, C.Jonkers, R.A. Kortram, and Peter Vandendriessche. The solution below is based on that of Peter Vandendriessche.
Substitute $x = \tan(t)$, then the integral can be written as
$$I = \int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan t)\mathrm{d}t.$$
Substitute $t = \frac{\pi}{4} - s$, then we get
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \log\left(1+\frac{1-\tan s}{1+\tan s}\right)(-\mathrm{d}s) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1+\tan s}\right)\mathrm{d}s = \frac{\pi}{4}\log 2 - I,$$
hence $I = \frac{\pi\log(2)}{8}$.
C. Jonkers remarks that this exercise was also published in work of F. Frenet as well as in *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik* of N. M. Günter and R. O. Kusmin, (ISBN 978-3-8171-1641-6).

Problem 2006/3-B

1. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $a_1, \dots, a_n$ such that
$$\sqrt{10+3\sqrt{11}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$
2. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $b_1, \dots, b_n$ such that
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{b_i}.$$

Solution This problem was solved by R.A. Kortram and N. Hekster. The solution below is based on that of R.A. Kortram.
1. It is a simple matter to verify the identity $\sqrt{10+3\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}}$. It is also clear that there is no rational number a such that $\sqrt{10+3\sqrt{11}} = \sqrt{a}$, because the existence of such a number a would imply that $10+3\sqrt{11} = a$, i.e. $\sqrt{11} \in \mathbf{Q}$; clearly a contradiction. Thus, the smallest possible integer n is 2.
2. From the trivial identity $(\sqrt[3]{2}+1)^3(\sqrt[3]{2}-1) = 3$, we derive that
$$(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{(\sqrt[3]{2}-1)} = \sqrt[3]{3},$$
and after multiplying both sides by $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$, we obtain
$$3\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$
Thus, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.
Now assume that there exist rational numbers a and b such that
$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$
Raising both sides of this identity to the third power leads to
$$\sqrt[3]{2}-1 = a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}) = a+b+3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}).$$
This implies that $\sqrt[3]{2} - (a+b+1) = 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1})$. Raising both sides to the third power shows that $\sqrt[3]{2}$ satisfies an equation of degree 2 over $\mathbf{Q}$:
$$3(a+b+1)(\sqrt[3]{2})2 - (3(a+b+1) - 27ab)\sqrt[3]{2} - 2 - 27ab + (a+b+1)3 = 0.$$
Since $\sqrt[3]{2}$ has degree 3, all coefficients must be zero, i.e.
$$(a+b+1) = 0 \quad 3(a+b+1) - 27ab = 0 \quad (a+b+1)3 - 27ab - 2 = 0,$$
which is clearly impossible.

Eindredactie: Matthijs Coster
Redactieadres: Problemenrubriek NAW
Mathematisch Instituut
Postbus 9512
2300 RA Leiden
uwc@nieuwarchief.nl

Problem 2006/3-C

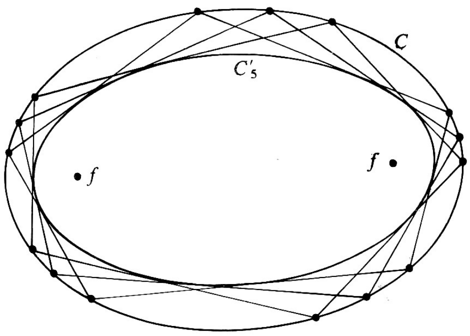
Consider the triangle ABC inscribed in an ellipse. For given A the other vertices can be adjusted to maximize the perimeter. Prove or disprove that this maximum perimeter is independent of the position of A on the ellipse.

1 Solution

We received two submissions to this problem, one incorrect. The problem was solved by Jaap Spies, who remarked that it is a classical result, based on the Poncelet theorem, to be found in Darboux [1] Livre III, Chapitre III, Part 176 (see Appendix).

The statement of the problem follows from the Theorem of Chasles, which is given below. For a modern proof of this theorem, we refer to Berger [2], p. 243.

Theorem 1.1 *Let C be an ellipse and $n \geq 3$ an integer. Among the convex polygons with n distinct vertices inscribed in C, there exist infinitely many with maximal perimeter. In fact, one vertex of such a maximal perimeter polygon (MPP) can be chosen arbitrarily on C. Furthermore, the sides of all n-vertex MPP's are tangent to the same ellipse C'_n, which has the same foci as C.*



Jaap Spies remarks that Lion [3] includes a proof that is independent of Poncelet's Theorem.

References

[1] G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique*, 1917 Gauthier-Villars, Paris. Available in facsimile: http://gallica.bnf.fr
[2] M. Berger, *Geometry II*, 1987, Springer Verlag, Berlin.
[3] George Lion, 'Variational Aspects of Poncelet's Theorem', *Geometricae Dedicata* **52**, 105–118, 1994.

2 Appendix

A reprint of the pages of Darboux [1], containing the result.

deux côtés consécutifs sera tangente aux deux côtés adjacents et, de proche en proche, à tous les autres. Ainsi, nous obtenons ce beau théorème de Chasles :

Les polygones de périmètre maximum et d'un nombre de côtés donné inscrits dans une ellipse (E) *devront être circonscrits à une ellipse* (E'), *homofocale à* (E).

D'après cela, si nous voulons inscrire le polygone de n côtés, on pourra procéder de la manière suivante.

Prenons l'ellipse (E'), suffisamment voisine de (E), et inscrivons dans (E) une ligne brisée $A_1 A_2 \ldots A_n A_{n+1}$ circonscrite à (E'). Elle ne se fermera pas tout d'abord. Mais, si l'ellipse (E') diminue, le point A_{n+1} s'avancera sur (E), et il arrivera nécessairement un moment où il rejoindra A_1. Alors la ligne brisée se transformera en un polygone convexe satisfaisant à toutes les conditions géométriques que nous avons énoncées. Si l'ellipse (E') continue à diminuer, le point A_{n+1}, avançant toujours sur (E), viendra coïncider une seconde fois avec A_1 de manière à donner un polygone qui ne se fermera qu'après deux tours, et ainsi de suite. On aura donc, comme dans le cercle, à envisager à la fois des polygones convexes et des polygones étoilés.

176. D'après les théorèmes de Poncelet, nous savons que, dès que l'on aura obtenu un de ces polygones, il y en aura une infinité. Comme ils satisfont tous à la condition du maximum, il est à prévoir qu'ils auront tous le même périmètre. C'est une propriété dont on

---

l'équation

$$\text{(H)} \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - c^2} = 1.$$

Si a' a pour valeur

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2},$$

il existera une infinité de quadrilatères circonscrits à (H) et inscrits dans (E). L'un d'eux sera formé par les deux asymptotes de l'hyperbole et par ses tangentes aux sommets.

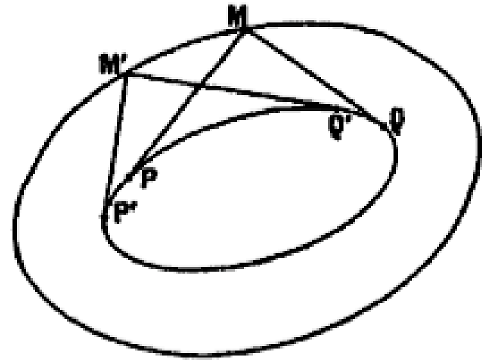
Cette solution exige, comme on le voit, que l'ellipse (E) soit telle que l'on ait

$$a < c\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad b < c.$$

peut rattacher la démonstration à une proposition élégante de Chasles.

Considérons deux ellipses homofocales (E), (E′), et supposons que, d'un point quelconque M de l'ellipse extérieure (E), on mène les deux tangentes MP, MQ à l'ellipse intérieure (E′). Nous allons démontrer que, *lorsque le point* M *se déplacera sur* (E), *la*

Fig. 21.



différence entre la somme des tangentes MP, MQ *et l'arc* PQ *de l'ellipse* (E′)

$$D = \overline{MP} - \overline{MQ} - \text{arc } PQ$$

demeurera constante.

Pour établir cette proposition, nous emploierons la formule connue

$$d\,AB = -\,AA' \cos \overline{A'AB} - BB' \cos \overline{B'BA},$$

relative à la différentielle d'un segment de droite AB qui, de sa position primitive AB, passe à la position infiniment voisine A′B′. Si nous l'appliquons successivement aux deux segments MP, MQ en supposant que le point M vienne dans la position voisine M′, nous aurons

$$d\,\overline{MP} = -\,\overline{MM'} \cos \overline{M'MP} + \overline{PP'},$$
$$d\,\overline{MQ} = -\,\overline{MM'} \cos \overline{M'MQ} - \overline{QQ'}.$$

Si l'on ajoute ces deux relations, en remarquant que, d'après la propriété de la tangente en M, les deux angles $\overline{M'MP}$ et $\overline{M'MQ}$ sont supplémentaires, il vient

$$d(\overline{MP} + \overline{MQ}) = \overline{PP'} - \overline{QQ'} = d\,\text{arc } PQ.$$

La différence

$$D = \overline{MP} + \overline{MQ} - \text{arc } PQ$$

est donc constante, comme il fallait le démontrer.

Supposons maintenant que les ellipses (E), (E′) soient telles qu'il y ait un polygone et, par conséquent, une infinité de polygones inscrits dans (E) et circonscrits à (E′). En calculant la différence précédente pour les sommets de chacun de ces polygones et ajoutant toutes les équations ainsi obtenues, on sera conduit à l'égalité

$$nD = P - kp',$$

P étant le périmètre du polygone, k le nombre de tours qu'il fait avant de se fermer et p' le périmètre de l'ellipse (E′). P *sera donc le même pour tous les polygones considérés.*